

Test č. 7

Deskriptivní geometrie, I. ročník kombinovaného studia FAST,
letní semestr 2004-2005

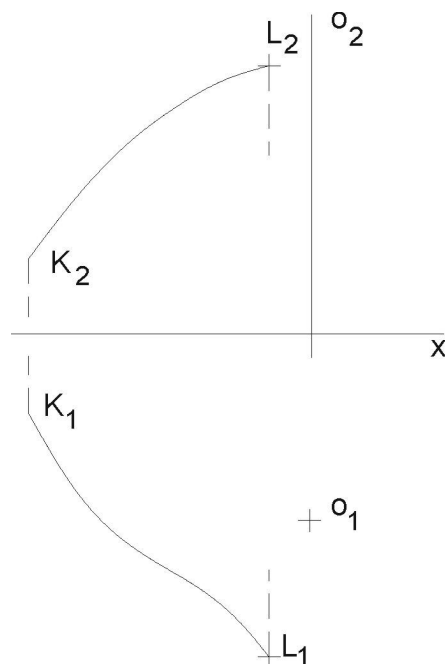
Proniky rotačních ploch

Některé příklady jsou čerpány ze skript: Holář Štěpán, Holářová Libuše – Cvičení z deskriptivní geometrie III. – Plochy stavebně technické praxe, Fakulta stavební VUT, Brno 1992.

(1.př. zadán přímo; 2.př. str.34., cv.9.; 3.př. str.35., cv.14.; 4.př. je zadán přímo; 5.př. zadán přímo)

V Mongeově promítání - kladný směr osy x doprava.

- (1) Sestrojte hlavní meridián rotační plochy (tj. čáru skutečného obrysu vzhledem k nárysně), která vznikne rotací obecné prostorové křivky k (s koncovými body K, L) okolo osy o , podle obr. 1. V některém bodě prostorové čáry sestrojte tečnou rovinu τ , především její spádovou přímkou s^τ , protínající osu rotace a půdorysnou stopu p^τ tečné roviny. (viz obr.1)



Obr. 1

- (2) Sestrojte elipsu, která se dvakrát dotýká elipsy a prochází body $A(-5; -28)$, $B(13; 8)$, $C(-37; 11)$. Elipsa je určena středem $S(0; 0)$, hlavní poloosou $a = 50$ na ose x , vedlejší poloosou $b = 35$

[Úloha je z počátku formulovaná jako rovinná záležitost. Proto z počátku vynášíme jen podle dvou os x a y . Půdorys připojujeme teprve později jako pomocnou metodu.]

Návod: Danou elipsu považujte za hlavní meridián rotačního elipsoidu s osou rotace kolmou k půdorysně. Půdorysnu volte tak, aby celý elipsoid byl nad ní (tj. osu $x_{1,2}$ pod elipsou). Půdorys o_1 osy rotace volte dostatečně pod osou $x_{1,2}$ tak, aby se oba průměty elipsoidu nepřekrývaly. Body A , B , C považujte za druhé průměty bodů na ploše elipsoidu (a nikoli uvnitř plochy). Má-li hledaná elipsa (je to rovinná křivka) procházet body A , B , C , bude ležet v jejich rovině $\rho = ABC$. Tyto tři body jsou však na povrchu daného elipsoidu, proto i hledaná elipsa je na povrchu a musí tudíž nutně být rovinným řezem daného elipsoidu (s tím, že body přechodu viditelnosti se stanou současně (v požadavku úlohy „...*dvakrát se dotýká elipsy*...“) dotykovými body dané a hledané elipsy.

Odvoďte za tohoto předpokladu půdorysy daných bodů: bodem, na př. A_2 proložte kružnici (ležící na ploše elipsoidu a mající svůj střed na ose rotace.) Její poloměr přenesete z 2. průmětu kružítkem do 1. průmětu. Uvědomte si, že 1. průmět na př. bodu A_1 se odvodí ordinálou z bodu A_2 . Avšak tato ordinála v obecném případě protne uvažovanou kružnici dvakrát. Vaším úkolem je vybrat pro další postup jen jednu polohu A_1 , z obou možných. Obdobně musíte vybrat ze dvou možností i bod B_1 a C_1 . V dalším považujte tyto body za vrcholy trojúhelníka a najděte za této podmínky napřed stopníky stran trojúhelníka a potom i stopy roviny $\rho \equiv ABC$.

Řešením tedy je průsek (rovinný řez) elipsoidu rovinou ρ . Uplatněte (nastudujte předem, např. str.23. Holář III)) všechny kroky, obvyklé při úloze „*rovinný řez rotační plochy*“, tj. body přechodu viditelnosti na křivce řezu vzhledem k nárysně a vzhledem k půdorysně, nejvyšší bod M_2 a nejnižší bod N_2 křivky řezu). Vyrýsujte jen jedno z možných řešení (různá řešení vznikají různou volbou bodů A_1 , B_1 , C_1 - viz nahoře).

Dále můžete v některém bodě A , B , C sestrojít tečnou rovinu τ plochy elipsoidu a tečnu t řezu (jako průsečnici roviny řezu ρ a tečné roviny τ .)

- (3) Sestrojte průnik rotačního kužele a plochy kulové, která se dotýká jednak kužele v bodě $T[-10; ?; 66]$ a půdorysny. Kužel má podstavu v π o středu $O[0; 53; 0]$ a poloměru $r = 42$, výška $v = 100$.

- Sestrojte tečnu průnikové křivky v jejím obecném bodě.
- Sestrojte také body přechodu viditelnosti průnikové čáry na obrysových povrchových přímkách kužele vzhledem k nárysně.

- Sestrojte body přechodu viditelnosti na kružnici, která vytváří půdorysný obrys kulové plochy.

Návod: Nejdříve odvodíme 1. průmět T_1 bodu T na povrchu kužele: proto v hladině $z = 66$ zavedeme na kuželu kružnici, odvodíme její půdorys a ordinálou vybereme 1. průmět T_1 (je to náročné na pečlivé rýsování). Doporučuji vybrat takovou polohu T_1 , která má menší y -ovou souřadnici od osy x než střed O_1 . Celá průniková čára bude v prostoru symetrická podle roviny σ , procházející body O , T kolmo k půdorysně. Určíme tedy rovinu $\sigma_1 \equiv O_1T_1$, (tj. přímkou σ_1). Využijeme symetrie. Tuto rovinu sklopíme o pravý úhel do půdorysny a vytvoříme tak vlastně třetí průmět pro celý průnik. Povrchová přímka kužele, jdoucí bodem T , se stane potom v třetím průmětu obrysovou přímkou kužele. Kulová plocha se v třetím průmětu zobrazí jako kružnice, dotýkající se osy sklápění $x_{1,3} = \sigma_1 = \pi_3$, tj. třetího průmětu půdorysny. Aby vůbec k průniku došlo, musí se kulová plocha dotýkat kužele tzv. „zevnitř“. Proto se zobrazí kulová plocha jako kružnice, dotýkající se takové povrchové přímky kužele, která prochází bodem T . Kružnice se dotkne povrchové přímky právě přesně v bodě T_3 . Pro narýsování kružnice známe tedy tečnu s dotykovým bodem T_3 a další tečnu x_{13} . (V dotykovém bodě T_3 sestrojíme kolmici k tečně. Dále sestrojíme kružítkem osu souměrnosti úhlu mezi těmito dvěma tečnami. Průsečík kolmice a symetrály je hledaný střed S_3 kulové plochy). Ordinálou odvodíme 1. průmět $S_1 \in \sigma_1$ a konečně i S_2 (příčměž jeho z -ová výška se převezme z třetího průmětu). Poloměr kulové plochy je v prostoru vzdálenost ST a zobrazí se v třetím průmětu ve skutečné velikosti jako úsečka S_3T_3 .

Protože kulová plocha má nekonečně mnoho os rotace, vybereme do úvah tu, která je rovnoběžná s osou kužele, čili osa kulové plochy bude kolmá k půdorysně (abychom měli pro průnik případ dvou rovnoběžných os rotace). Řešíme potom jako u soustavy s dvěma rovnoběžnými osami (ale od nárýsny různě odsunutými, umístěnými s různými y -vými vzdálenostmi od nárýsny). Zavádění vodorovných hladin začínáme v nárýsu. Do 1. průmětu odvozujeme příslušné kružnice – vždy v hladině po jedné z každého tělesa. Takové kružnice se budou v 1. průmětu protínat už v bodech průnikové čáry. Tyto body odvodíme do nárýsu a dáme pozor, abychom vybrali právě tu hladinu, ve které body vznikaly. Pokud se už kružnice v půdorysu neprotnou, znamená to, že jsme v oblasti, kde už není žádný bod průnikové čáry.

- Obrysové body průnikové čáry vzhledem k půdorysně vznikají jen na „rovníku“ kulové plochy. Proto uplatníme právě hladinu této kružnice a v ni obecnou metodou najdeme průnikové body. V nárýse se stávají jen pomocnými, obecnými body a vhodně doplňují průnikovou čáru.
 - Obrysové body v nárýsu rozdělíme na oddělené konstrukce pro nárýs kužele a pro nárýs kulové plochy. Hledáme je až po dostatečně přesném vyrýsování průnikové čáry (co nejvíce bodů)
- a) Nárýsem kužele jsou dvě povrchové přímky (které se v půdoryse jeví jako rovnoběžka s osou x , vedená bodem V_1). Takže, kde v 1. průmětu tato rovnoběžka

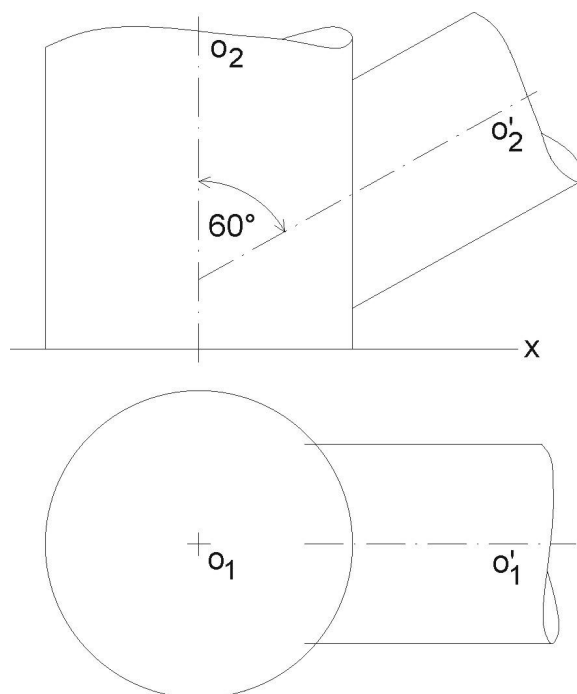
(= dvě povrchové přímky kužele v půdoryse) protne průnikovou křivku, tam jsou hledané body pro nárys. Proto ordinálou (případně za pomoci třetího průmětu) odvodíme jejich přesnou polohu v náryse.

- b) Nárysem kulové plochy je kružnice, jejíž rovina prochází středem S kulové plochy a sice rovnoběžně s nárysnou. V půdoryse se jeví jen jako úsečka, rovnoběžná s osou x (jako průměr kulové plochy). Zase vyhledáme v půdoryse průsečíky tohoto průměru s půdorysem průnikové čáry a ordinálou odvodíme nárys těchto průsečíků na obrys kulové plochy (kontrolujeme z -ovou výšku s přihlédnutím ke třetímu průmětu).

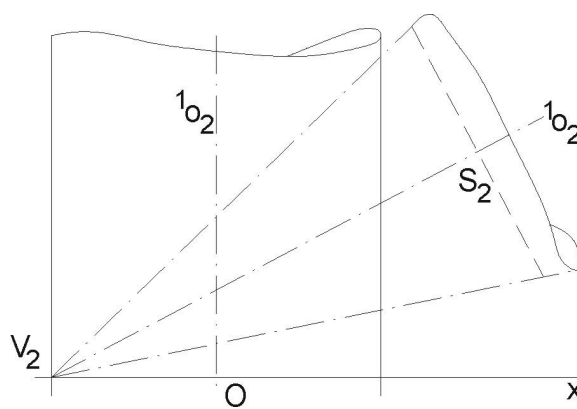
- Nejvyšší bod M_3 průnikové čáry je průsečíkem třetího průmětu kužele a kulové plochy, tedy přímky a kružnice. Leží v rovině souměrnosti σ_1 . V náryse je tečna průnikové čáry v tomto bodě M_2 rovnoběžná s půdorysnou!
- *Tečna průnikové čáry:* je průsečnicí dvou tečných rovin, dotýkajících se obou ploch v příslušném společném bodě X průnikové čáry. Jedná se o samostatnou úlohu „konstrukce tečné roviny“ (str.22. Holář III) směřující až k vyhledání její půdorysné stopy. Vyhledání půdorysné stopy zde není možno (pro obsáhlost) popsat. Jakmile však najdeme obě půdorysné stopy p_1^α a p_1^β , jejich průsečík P^t je už stopníkem hledané tečny. Takže jej stačí spojit s příslušným bodem X průnikové čáry a tak získáme tečnu $t = P^tX$. Tečnu k průnikové čáře je možné konstruovat také jako kolmici k rovině určené normálami k rotačním plochám v daném bodě.

- (4) Sestrojte průnikovou křivku dvou rotačních ploch válcových, jejichž osy se protínají pod úhlem 60° a osy jsou přitom rovnoběžné s nárysnou. Rotační válcové plochy mají poloměry $r = 30$ se svislou osou o a poloměr $r' = 25$ s nakloněnou osou o' . Sestrojte tečnu v obecném bodě průnikové čáry. Připojte i půdorys těchto válců a vyznačte v něm také průnikovou křivku s tečnou. (*Pro průnik užíjte metodu soustředných pomocných kulových ploch. Pro tečnu užíjte metodu normálových rovin.*) Obr.2 je jen orientační. Rýsujte podle údajů.
- (5) Sestrojte průnik rotačního válce s rotačním kuželem, jejichž osy se protínají a leží v nárysně. Rotační válec má svislou osu 1o , procházející bodem $Q[0,0,0]$ a poloměr $r = 30$, rotační kužel má osu $^2o = VS$, vrchol kužele $V[-30,0,0]$, střed kruhové podstavy (kolmé k nárysně) $S[60,0,51]$, poloměr podstavy $^2r = 35$. Sestrojte v jednom bodě průnikové čáry její tečnu. (*Opět užíjte pro průnikovou čáru metodu soustředných kulových ploch a pro tečnu průnikové čáry normálové roviny v průnikovém bodě čáry.*) Obr.3 je jen orientační. Rýsujte podle souřadnic.

Odevzdávejte poštou a najednou všechny příklady. Budou Vám vráceny opravené poštou přes děkanát. Poznámka při opravách „znovu“ znamená přerýsovat příklad, poznámka „dodělat“ znamená dorýsovat daný příklad.



Obr. 2



Obr. 3

Mgr. Jan J. Šafařík
 Mgr. Pavel Hon
 Petr Koplík
 Typeset by L^AT_EX