Test č. 9

Deskriptivní geometrie, I. ročník kombinovaného studia FAST,
letní semestr 2001/2002

Zborcené plochy

Při vypracování úloh se využijí následující poučky:

a) u plochy jednodílného hyperboloidu a hyperbolického paraboloidu je každá přímka jednoho systému přímek protínána všemi přímkami druhého systému přímek;
b) v každém bodě těchto ploch se kříží dvě různoběžné tvořící přímky plochy (jsou z opačných systémů přímek) a tyto různoběžky určují tečnou rovinu plochy s dotykovým bodem v jejich průsečíku;
c) při pohybu dotykového bodu tečné roviny po jedné z tvořících přímek se postupně tečná rovina okolo takové přímky oytáčí (Chaslesův korespondenční princip, viz Š. Holáň, DG III. díl, str. 37. a J. Vala, DG II. díl, str 99).

(1) Vypište zde všechny 3 možnosti, jakými útvary (kolika přímkami, rovinami) může být zadána zborcená plocha *hyperbolického paraboloidu.*
a), b), c)

(2) Jakou vzájemnou polohu mají mezi sebou tvořící přímky jednoho systému na *jednodílném hyperboloidu.* Kolika tvořícími přímkami je tato plocha určena?

(3) Co je to Chaslesův korespondenční princip, vypište slovy:

(4) Jakou vzájemnou polohu zaujímají tyto tři přímky a, b,c v axonometrickém zobrazení, podle obr.4a), a dále v Mongeově projekci, podle obr. b) a c)?

Návod: Jsou-li 3 přímky rovnoběžné (každá přímka zvláště) s jistou rovinou, (ale mezi sebou zůstávají vzájemně mimoběžné), pak určují hyperbolický paraboloid. Takovou polohu mimoběžek nazýváme „*komplanární*“.

(5) Zborcená plocha je určena řídicí rovinou α a mimoběžkami a, b, podle obr. 5). Připište zde název této plochy. Dále sestrojte v bodě B tečnou rovinu τ, která se dotýká plochy právě v bodě B!

Návod: tečná rovina je tvořena přímkou b a přímkou z druhého (opačného) systému, zpravidla tedy čárkovanou. Dále platí: jsou-li dány dvě mimoběžné přímky plochy a řídicí rovina, pak přímky *druhého* systému (tudíž čárkované a v obr. nezadané), musí být rovnoběžné s danou řídicí rovinou.

Poznámka: zadaná řídicí rovina je tam kvůli možnosti tvořit přímky druhého, čárkovaného systému. V podstatě nahrazuje třetí přímku, která je nevlastní. Všechny přímky druhého regulu musí tuto nevlastní přímku protnout. Z toho plyne, že jsou rovnoběžné s řídicí rovinou. Kdyby totiž byla chybně zadána řídicí rovina, patřící k systému přímek a,b, zborcená plocha by nebyla dostatečně zadána.
Řídicí rovinu, patřící k systému přímek a,b si sami kdykoli můžeme odvodit: zvolíme v prostoru pevný bod a v něm vedeme po jedné rovnoběžce s každou ze zadaných mimoběžek a,b. Tyto nové přímky jsou mezi sebou různoběžné a určují rovinu, které říkáme „ řídicí“.
Jde tedy o to, vést bodem B přímku druhého (čárkovaného) systému, ale rovoběžně s řídicí rovinou α. Bodem B vedeme posunutou rovinu $\alpha' \parallel \alpha$ (zavedením hlavní přímky nové roviny α' některé osnovy bodem B). Po sestrojení stop nové roviny α', najdeme průsečík A druhé přímky a s rovinou α'. AB je přímka g čárkovaného systému, přímka je rovnoběžná s rovinou α. Takže nyní máme dvě různoběžky, protínající se v bodě B. Tím úkol končí. Pokud by bylo požadováno „*sestrojit v bodě B tečnou rovinu*“, byla by už tvořena těmito různoběžkami $\tau = b.g'$.

(6) Hyperbolický paraboloid je zadán průměty dvou mimoběžek a,b a řídicí rovinou π (půdorysnou), při čemž je $a_1 \parallel b_1$. Dále je dán T_2 bodu T, který leží na ploše. Odvoďte chybějící půdorys T)1! Podle obr. 6.

Návod: vedeme bodem T_2 přímku g' druhého systému, rovnoběžnou s řídicí rovinou π, takže g'_2 je rovnoběžná se základnicí. Odvodíme pomocí jejích průsečíků s přímkami a,b také půdorys g'_1 a na ordinále T_1. Bodem T procházejí po jedné přímce g' a c z každého systému. Přímku c_1 máme ihned: když $a_1 \parallel b_1$ je i $c_1 \parallel a_1 \parallel b_1$ (kvůli komplanaci u HP). Dále připravíme ještě nejméně jednu přímku m' čárkovanou ($\parallel \pi$), např. ležící přímo v π. (Půjde spojnici půdorysných stopníků přímek a,b.) Přímka c_1 na přímce m'_1 vytne také svůj půdorysný stopník (protože se tyto přímky z opačných systémů ze zásady musí protnout a protože celá přímka m' leží v půdorysně.) Odvodíme nárys tohoto stopníku P^c_2 a v nárysе jeho propojením s bodem T_2 získáváme nárys přímky c_2.

(7) Hyperbolický paraboloid je určen mimoběžkami a,b a řídicí rovinou π (půdorysnou), podle obr.7. Přitom $a_1 \parallel b_1$. Odvoďte nárys bodu M_2, leží-li M na ploše, a je zadán jen svým půdorysem M_1.

Návod: postupujeme podobně jako v 6.př.: nejdříve připravíme c_1, $M_1 \in c_1 \parallel b_1$. Dále v nárysе narýsujeme aspoň dvě přímky čárkované a odvodíme je do půdorysu. Vyhledáme v půdoryse dva průsečíky přímky c_1 s čárkovanými přímkami. Odvodíme tyto dva průsečíky do nárysu na čárkované přímky. Propojením těchto průsečíků v nárysе získáme i přímku c_2 a na ordinále bod M_2.

(8) Hyperbolický paraboloid je zde, podle obr. 8., zadán nakonec už velmi obecně: mimoběžky a, b, (které už nemají rovnoběžné první průměty) a řídicí rovinou π. Máme najít půdorys bodu A, ležícího na ploše, je-li dán jeho nárys.

Návod: zavedeme bodem A_2 čárkovanou přímku g'_2 rovnoběžnou se základnicí ($\parallel \pi$) a odvodíme její půdorys včetně půdorysu bodu A_1. S přímkou $c \in A$ to bude však složitější: její půdorys nemůžeme dokonce ani odhadnout (komplanace přímek a, b, c na ploše hyperbolického paraboloidu - i když v prostoru určitě existuje - v prvním průmětu je zastřena). Pomůžeme si jistou grafickou „lstí" (je užívána i v literatuře a bez ní to ani nejde): na ploše tedy existují nyní vodorovné čárkované přímky (díky tomu, že π je jejich řídicí rovina). Jedna z čárkovaných přímek je sice vodorovná, ale navíc také kolmá k nárysně, nazveme ji $r' \perp \nu$. Stále - i zde - platí obecná věta: *„Všechny přímky nečárkovaného systému jsou protínány zase přímkami systému čárkovaného"*.Tato přímka r' proto nutně protíná přímky a, b (protože vzhledem k nim patří do opačného systému). Protože ale $r' \perp \nu$, jeví se v nárysе jen jako bod r'_2. Oba průsečíky přímek a, b s přímkou r' ačkoli jsou od sebe různé, v nárysе se promítají do jediného bodu r'_2. Ten tedy musí potom být (pro oba nárysy přímek a, b) společným průsečíkem.
Dále platí, že i přímka c (procházející bodem A) musí protínat přímku r' a její nárys proto musí procházet také bodem r'_2, tedy $c_2 = r'.A_2$. Nárys přímky c již máme. Známe-li alespoň dvě čárkované přímky q', p', můžeme půdorys přímky c odvodit s jejích pomocí.
V bodě T se kříží přímky c a g'. Tyto přímky určují tečnou rovinu τ s bodem dotyku T s plochou. Najděte i stopy tečné roviny τ.

(9) V obr. 9 je zadání hyperbolického paraboloidu trochu převrácené. Řídicí rovinou je nárysna ν a nárysy přímek a, b jsou spolu rovnoběžné. Dále je dán nárys bodu T. Odvoďte jeho půdorys a stopy tečné roviny pro tento dotykový bod T. Podrobný popis už neuvádíme, student by se měl postup odvodit a aplikovat kroky podle předcházejících úloh.

(10) Zde je plocha HP, obr. 10., určena zborceným čtyřúhelníkem A, B, C, D. Body L a Q leží na ploše. Odvoďte chybějící půdorys bodu L a chybějící nárys bodu Q.

Návod: vyzkoumejte polohy řídicích rovin a z toho vyplývající zákonitost pro průměty tvořících přímek obou systémů. Potom už snadno zavedete danými průměty bodů jednotlivé průměty tvořících přímek a k těmto průmětům pak přiřadíte i chybějící průměty přímek.

(11) V obr. 11. si důsledně všímejte, že u zborceného čtyřúhelníka jsou strany AB a CD spolu v prvním průmětu rovnoběžné! Máte odvodit chybějící průmět bodu T, ležícího na ploše. Jistě to dokážete sami.

Zde končí základní úlohy na hyperbolický paraboloid a poučky, uvedené v úvodu. Další příklady jsou již aplikace, v principu použitelné ve stavebnictví.

(12) V obr.12. je dána v axonometrii přechodová plocha *hyperbolického paraboloidu*, propojující dva profily různých sklonů a a b. Máte sestrojit 8 tvořících přímek každého systému. Podotýkáme, že další stavební uplatnění, tomuto blízké, můžeme nalézt při zastřešení, jsou-li vodorovný hřeben a okapová hrana ve vzájemně mimoběžné poloze.

(13) Stejný úkol Vás čeká v obr. 13. Jde jen o jiný axonometrický pohled na tuto přechodovou plochu, tvořenou zborceným (prostorovým) čtyřúhelníkem, jehož strany leží na přímkách, popsaných takto: nakloněné a, b, vodorovná g' je v půdorysně a h' je vodorovná, ale horní strana. U plochy takto natočené vzhledem k pozorovateli získáme navíc i křivku axonometrického obrysu (tou bude parabola, jako obalová křivka axonometrických průmětů tvořících přímek). Váš úkol bude vybrat jednu tvořící přímku a konstruktivně najít na jejím axon. průmětu dotykový bod s obrysovou čarou (obrysový bod, bod přechodu viditelnosti).

Návod: Užijete vlastnosti, že každou tvořící přímkou plochy prochází nekonečně mnoho tečných rovin a každá má svůj dotykový bod na jiném místě takové přímky (při postupu dotykového bodu po tvořící přímce se postupně také otáčí okolo tvořící přímky i příslušná tečná rovina = Chaslesův princip).
Z promítacích metod víme, že prochází-li tečná rovina právě okem pozorovatele, je vzhledem k pozorovateli v tzv. „*promítací poloze*“. Protože tečná rovina prochází přímkou, bude dotykový bod tečné roviny ležet na tvořící přímce. Dotykový bod se bude jevit jako bod přechodu a změny viditelnosti. Bude se jevit jako obrysový bod, ve kterém průmět tvořící přímky se dotýká obrysové čáry a proto mění svou viditelnost a průmět pak pokračuje jako neviditelný.
Jak to prakticky provedeme? Označme v obr. přímky skloněné k půdorysně jako nečárkované a vodorovné budou naopak čárkované a hned dvě z nich, tj. strany čtyřúhelníka označme dolní g' a horní h'. Vyberme potom některou tvořící, např. čárkovanou, vodorovnou přímku m', ležící mezi přímkami g' a h'.
Pro vyhledání bodu přechodu viditelnosti na přímce m' musíme uvážit, že přímka m' je také průmětem tečné roviny (v promítací poloze, procházející okem pozorovatele) a tedy současně i průmětem další přímky c z opačného systému - nečárkované a nakloněné, právě také ležící v této tečné rovině. Nyní se zaměříme na tuto nečárkovanou přímku c. Představíme si, že c protíná např. vodorovné přímky g' v bodě P a přímku h' v bodě H. Máme nyní dvě různoběžky c a m', vzájemně se (vzhledem k pozorovateli) zakrývající. Doplníme ještě půdorysy přímek c a m'. Přímka c_1 je dána body $P = P_1$ a H_1 (pomocí průsečíků P přímky c na straně g' a pomoci průsečíku H přímky c na straně h') a m'_1 pomocí průsečíků přímky m' se stranou b a se stranou a, takže u všech těchto průsečíků odvodíme ordinálami jejich půdorysy.

Propojením P s půdorysem H_1 obdržíme půdorys c_1 a u něj dbejme, aby byl rovnoběžný s $a_1 \parallel b_1$. Pro kontrolu přesnosti je užitečné si uvědomit, že půdorys přímky m_1' musí směřovat do průsečíku půdorysů přímek p_1' a h_1', jde o obdobu z úlohy 8.př. a obr.8. a přímku r'. Půdorysy přímek m' a c se kříží v půdoryse dotykového bodu T. Ordinálou odvodíme nahoru na přímku $m' = c$, tedy na společný axonometrický průmět přímek m' a c definitivně i bod T. Toto je obrysový bod.

(14) Podle obr.14. je zadán v kolmé axonometrii (axon. trojúhelník volte sami) *kruhový konoid* a je ještě připojen informační obrázek v Monge (také viz J.Vala, DG II., str.97. a Š.Holáň, DG III., str.43). Řídicí kružnice k leží v souřadnicové rovině $y.z$, má střed S v počátku a poloměr $r = 30$, řídicí přímka d prochází bodem $Q[50, 0, 0]$ a je rovnoběžná s osou y, řídicí rovinou konoidu je nárysna $x.z$. Je dán ještě půdorys $T_1[25, 20, ?]$ bodu T, ležícího na ploše.

a) Odvoďte bod T (užitím tvořící přímky m plochy).
b) Sestrojte řez e rovinou $\alpha \in T$, $\alpha \parallel y.z$. V bodě T sestrojte konstruktivně tečnu křivky e řezu.
c) Dále sestrojte řez vertikální rovinou λ, volenou bodem T, ale různoběžnou se souřadnicovými rovinami.

Návod:
ad a) tvořící přímka m konoidu bude rovnoběžná s řídicí rovinou $x.z$. Proto její půdorys m_1 bude procházet daným půdorysem T_1, rovnoběžně s osou x. Průsečík m_1 s půdorysem k_1 (na ose y) kružnice k označme M_1. Ordinálou odvodíme na kružnici nahoru bod M. Půdorys m_1 také protíná i řídicí přímku d v bodě P (d a P leží v půdorysně). Propojením $m = PM$ získáme tvořící přímku m. Ordinálou z půdorysu T_1 odvodíme na přímku m bod T.
ad b) pro křivka e řezu v rovině, rovnoběžné s bokorysnou $y.z$ platí, že 3.průmět křivky e_3 bude afinně sdružený s kružnicí $k = k_3$ a osou afinity bude osa y. Bod T_3 bude afinní k jistému bodu $T_3' = M$ na kružnici (a na vertikále). V prostoru by šlo o kolmou afinitu. Připravíme-li např. nejdříve tečnu t' kružnice v bodě T_3' a vyhledáme-li také průsečík L této tečny t' na ose afinity y, pak zpětně spojnice LT_3 je již afinní bokorys t_3 (tečny t elipsy). Samotná tečna t je v prostoru s bokorysnou rovnoběžná, protože leží ve svislé rovině $a \parallel y.z$, $t \parallel t_3$. Tečnu t rýsujeme tedy jako rovnoběžku s průmětem t_3 bodem T. Dbejme však aby stopník P^t se promítal v 3.průmětu do bodu L ($P^t L \parallel x$). Spojnice obou stopníků je už stopa tečné roviny τ, $p^\tau = P^m P^t$.
ad c) křivku g řezu sestrojujeme postupně bodově, každý její bod jako průsečík jednotlivé tvořící přímky s rovinou řezu λ. Je to snadné, protože rovina λ je svislá. Označme na libovolné tvořící přímce q bod řezu Q (kdybychom použili přímku m, pak by bod Q se stal bodem T, takže pro přehlednost vybereme přímku q raději jinou). Tečna k řezu rovinou λ v bodě Q je průsečnicí roviny λ a tečné roviny plochy v bodě Q.

Metodou jako pro bod T můžeme v bodě Q sestrojit tečnou rovinu τ^Q (Hledání tečné roviny τ^Q je zdlouhavé a opakuje se vše v bodě Q jako pro bod T: tj. bodem Q zavedeme rovinu $\beta \parallel y.z$. Připojíme třetí průmět Q_3, uplatníme afinitu na kružnici k, najdeme afinní bod Q' , dale afinní vztah mezi tečnami v bodě Q' a v bodě Q_3. Konečně doplníme o tečnu w v bodě Q (rovnoběžnou s $y.z$). Stopník P^w této tečny a stopník P^q tvořicí přímky q určují stopu p^σ tečné roviny σ s dotykovým bodem Q. Průsečík půdorysné stopy p^σ se stopou p^λ je už stopník P^c tečny c čáry řezu roviny λ. Spojnice půdorysného stopníku P^c a bodu Q je tečna c křivky řezu.

(15) Sestrojte v kolmé axonometrii, obr. 15., plochu násypky, tvořenou 4 díly (z nichž vždy dva a dva jsou symetrické) zborcené plochy *Montpellierského oblouku*. Každý takový díl je samostatně tvořen částí řídicí kružnice v půdorysně o středu v počátku, dále společnou řídicí přímkou $o = z$ a vodorovnou řídicí přímkou např. b (na ni leží strana vodorovného obdélníka). Jedná se tedy o přechodovou (ale nerozvinutelnou, zborcenou) plochu, propojující vodorovný obdélník či čtverec (vodorovná dvířka) s kružnicí (tj. ukončující svislé násypné potrubí). Máme tedy 4 Montpellierské oblouky, vzájemně na sebe navazující. Omezení a navázání na sebe u jednotlivých Montpellierských oblouků je ve svislých rovinách, procházejících úhlopříčkami AC, BD vodorovného obdélníka. Vaším úkolem je vyrýsovat tvořící přímky zborcené plochy ve všech 4 dílech. Přitom v každém dílu vyrýsujte nejméně 5 přímek, včetně krajních.

Návod: Protože všechny tvořící přímky musí protínat i řídící přímku $o = z$ a ta je (v našem příkladu) kolmá k půdorysně, budou všechny půdorysy tvořících přímek procházet půdorysem přímky o, tedy počátkem. Budou proto prostými protahovanými průměry kružnice. Poznačíme si u nich očíslováním 1, 2, 3, … průsečíky s kružnicí. V průsečících (obdobně očíslovaných $1'$, $2'$, $3'$, …) , kde tyto půdorysy tvořících přímek protínají půdorys b_1 strany b obdélníka, povedeme vertikálně ordinály na stranu b obdélníka. Tyto nové průsečíky očíslujeme 1^*, 2^*, 3^*, … Získáme tak systém čísel např.: $1 + 1' + 1^*$. Postupně propojujeme jednotlivě body 1 a 1^*, atd. a tak obdržíme tvořící přímku plochy. Neviditelné úseky čárkujeme.

Odevzdávejte poštou a najednou všechny příklady. Budou Vám vráceny opravené poštou přes děkanát nebo na konzultacích. Poznámka při opravách „*znovu*“ znamená je přerýsovat.

Typeset by $\mathcal{ZOBI}$–TEX
Mgr. Jan Šafařík