Test č. 7

Deskriptivní geometrie, I. ročník kombinovaného studia FAST, letní semestr 2001/2002

Proniky rotačních ploch

Některé příklady jsou čerpány ze skripta: Holáň Štěpán, Holáňová Libuše – Cvičení z deskriptivní geometrie III. – Plochy stavebně technické praxe, Fakulta stavební VUT, Brno 1992.

(1.př. zadán přímo; 2.př. str.34., cv.9.; 3.př. str.35., cv.14.; 4.př.je zadán přímo; 5.př. zadán přímo)

V Mongeově promítání - kladný směr osy x doprava.

(1) Sestrojte hlavní meridián rotační plochy (tj. čáru skutečného obrysu vzhledem k nárysně), která vznikne rotací obecné prostorové křivky k (s koncovými body K, L) okolo osy o, podle obr. 1. V některém bodě prostorové čáry sestrojte tečnou rovinu τ, především její spádovou přímku s^{τ}, protínající osu rotace a půdorysnou stopu pt tečné roviny.

(2) Sestrojte elipsu, která se dvakrát dotýká elipsy, určené: středem $S(0;0)$, hlavní poloosou $a = 50$ v ose x, vedlejší poloosou $b = 35$ a prochází body $A(-5;-28)$, $B(13;8)$, $C(-37;11)$.

[Úloha je z počátku formulovaná jako rovinná záležitost. Proto z počátku vynášíme jen podle dvou os x a y. Půdorys připojujeme teprve později jako pomocnou metodu.]

Návod: Danou elipsu považujte za hlavní meridián rotačního elipsoidu s osou rotace kolmou k půdorysně. Půdorysnu volte tak, aby celý elipsoid byl nad ní (tj. osu $x_{1,2}$ pod elipsou).Půdorys o_1 osy rotace volte dostatečně pod osou $x_{1,2}$ tak, aby se oba průměty elipsoidu nepřekrývaly. Body A, B, C považujte za druhé průměty bodů na ploše elipsoidu (a nikoli uvnitř plochy). Má-li hledaná elipsa (je to rovinná křivka) procházet body A, B, C, bude ležet v jejich rovině $\rho = ABC$. Tyto tři body jsou však na povrchu daného elipsoidu, proto i hledaná elipsa je na povrchu a musí tudíž nutně být rovinným řezem daného elipsoidu (s tím, že body přechodu viditelnosti se stanou současně (v požadavku úlohy „*...dvakrát se dotýká elipsy...*“) dotykovými body dané a hledané elipsy.
Odvoďte za tohoto předpokladu půdorysy daných bodů: bodem, na př. A_2 proložte kružnici (ležící na ploše elipsoidu a mající svůj střed na ose rotace.) Její poloměr

přenesete z 2. průmětu kružítkem do 1. průmětu. Uvědomte si, že 1. průmět na př. bodu A_1 se odvodí ordinálou z bodu A_2. Avšak tato ordinála přitom nutně v obecném případě protne uvažovanou kružnici dvakrát. Vaším úkolem je vybrat pro další postup jen jednu polohu A_1 (ze dvou možných poloh). Obdobně musíte vybrat ze dvou možností i bod B_1 a C_1. V dalším považujte tyto body za vrcholy trojúhelníka a najděte za této podmínky napřed stopníky stran trojúhelníka a potom i stopy roviny $\rho \equiv ABC$.
Řešením tedy je průsek (rovinný řez) elipsoidu rovinou ρ. Uplatněte (nastudujte předem, např. str.23. Holáň III)) všechny kroky, obvyklé při úloze „*rovinný řez rotační plochy*“, tj. body přechodu viditelnosti na křivce řezu vzhledem k nárysně a vzhledem k půdorysně, nejvyšší bod M_2 a nejnižší bod N_2 křivky řezu). Vyrýsujte jen jedno z možných řešení (různost řešení je odvozena od voleb prvních průmětů bodů A_1, B_1, C_1 ze vždy dvou možných poloh - viz nahoře).
V některém bodě A, B, C sestrojte tečnou rovinu τ plochy elipsoidu a tečnu t řezu (jako průsečnici roviny řezu ρ a tečné roviny τ.)

(3) Sestrojte průnik rotačního kužele a plochy kulové, která se dotýká jednak kužele v bodě $T[-10; ?; 66]$ a půdorysny. Kužel má podstavu v ρ o středu $O[0; 53; 0]$ a poloměru $r = 42$, výška $v = 100$.

- Sestrojte tečnu průnikové křivky, dotýkající se křivky v jejím obecném bodě.
- Sestrojte také body přechodu viditelnosti průnikové čáry na obrysových povrchových přímkách kužele vzhledem k nárysně.
- Sestrojte konečně i body přechodu viditelnosti na kružnici, která vytváří půdorysný obrys kulové plochy.

Návod: Nejdříve odvodíme 1.průmět T_1 bodu T na povrchu kužele: proto v hladině $z = 66$ zavedeme na kuželu kružnici, odvodíme její půdorys a ordinálou vybereme 1. průmět T_1 (je to náročné na pečlivé rýsování). Doporučuji vybrat takovou polohu T_1, která je menší y-ovou souřadnici od osy x než střed O_1. Celá průniková čára bude v prostoru symetrická podle roviny σ , procházející body O, T kolmo ještě i k půdorysně. Určíme tedy rovinu $\sigma_1 \equiv O_1T_1$, (tj. přímku σ_1). Využijeme symetrie. Tuto rovinu sklopíme o pravý úhel do půdorysny a vytvoříme tak vlastně třetí průmět pro celý průnik. Povrchová přímka kužele se stane potom v třetím průmětu obrysovou přímkou kužele. Kulová plocha se v třetím průmětu zobrazí jako kružnice, dotýkající se osy sklápění $x_{1,3} = \sigma_1 = \pi_3$, tj. třetího průmětu půdorysny. Aby vůbec k průniku došlo, musí se kulová plcha dotýkat kužele tzv. „zevnitř“. Proto se zobrazí kulová plocha jako kružnice, dotýkající se takové povrchové přímky kužele, která prochází bodem T. Kružnice se dotkne povrchové přímky právě přesně v bodě T_3. Pro narýsování kružnice známe tedy tečnu s dotykovým bodem T_3 a další tečnu ρ_3. (V dotykovém bodě T_3 sestrojíme kolmici k této tečně. Dále sestrojíme kružítkem osu souměrnosti úhlu mezi těmito dvěma tečnami. Průsečík kolmice a symetrály je hledaný střed S_3 kulové plochy). Ordinálou odvodíme 1. průmět $S_1 \in \sigma_1$

a konečně i S_2 (přičemž jeho z-ová výška se převezme z třetího průmětu). Poloměr kulové plochy je v prostoru vzdálenost ST a my ji vyčteme v třetím průmětu ve skutečné velikosti jako úsečku S_3T_3.
Protože koule má nekonečně mnoho os rotace, vybereme do úvah tu, která je rovnoběžná s osou kužele, čili osa koule bude kolmá k půdorysně (abychom měli pro pronik specielně případ dvou rovnoběžných os rotace). Řešíme potom jako u soustavy s dvěma rovnoběžnými osami (ale od nárysny různě odsunutými, umístěnými s různými y-vými vzdálenostmi od nárysny). Zavádění vodorovných hladin začínáme v nárysu. Do 1. průmětu odvozujeme příslušné kružnice – vždy v hladině po jedné z každého tělesa. Takové kružnice se budou v 1. průmětu protínat už v bodech průnikové čáry. Tyto body odvodíme do nárysu a dáme pozor, abychom vybrali právě tu hladinu, ve které body vznikaly. Pokud se už kružnice v půdorysu neprotnou, znamená to, že jsme v oblasti, kde už není žádný bod proníkové čáry.

- Obrysové body průnikové čáry vzhledem k půdorysně vznikají jen na „rovníku“ kulové plochy. Proto uplatníme právě hladinu této kružnice a v ni obecnou metodou najdeme průnikové body. V náryse se stávají jen pomocnými, obecnými body a vhodně doplňují průnikovou čáru.
- Obrysové body v nárysu rozdělíme na oddělené konstrukce pro nárys kužele a pro nárys kulové plochy. Hledáme je až po dostatečně přesném vyrýsování průnikové čáry (co nejvíce bodů)

a) Nárysem kužele jsou dvě povrchové přímky (které v půdoryse se jeví jako rovnoběžka s osou x, vedená bodem V_1. Takže, kde v 1. průmětu tato rovnoběžka (= dvě povrchové přímky kužele v půdoryse) protne průnikovou křivku, tam jsou hledané body pro nárys. Proto ordinálou (případně za pomoci třetího průmětu) odvodíme jejich přesnou polohu v náryse.

b) Nárysem kulové plochy je kružnice, jejíž rovina prochází středem S kulové plochy a sice rovnoběžně s nárysnou. V půdoryse se jeví jen jako úsečka, rovnoběžná s osou x, jako průměr kulové plochy. Zase vyhledáme v půdoryse průsečíky tohoto průměru s půdorysem průnikové čáry a ordinálou odvodíme nárys těchto průsečíků na obrys kulové plochy (kontrolujeme z-ovou výšku s přihlédnutím ke třetímu průmětu).

- Nejvyšší bod M_3 průnikové čáry je průsečíkem třetího průmětu kužele a kulové plochy, tedy přímky a kružnice. Leží v rovině souměrnosti σ_1 a přesně ve třetí průmětně. V náryse je tečna průnikové čáry v tomto bodě M_2 rovnoběžná s půdorysnou!
- *Tečna průnikové čáry*: je průsečnicí dvou tečných rovin, dotýkajících se obou ploch v příslušném společném bodě průnikové čáry. Jedná se o samostatnou úlohu „*konstrukce tečné roviny*“ (str.22. Holáň III) směřující až k vyhledání její půdorysné stopy. Vyhledání půdorysné stopy zde není možno (pro obsáhlost) popsat. Jakmile však najdeme obě půdorysné stopy p_1^α a p_1^β, jejich průsečík P^t je už stopníkem hledané tečny. Takže jej stačí spojit s příslušným bodem X

průnikové čáry a tak získáme tečnu $t = P^tX$. Tečnu k průnikové čáře je možné konstruovat také jako kolmici k rovině určené normálami k rotačním plochám v daném bodě.

(4) Sestrojte průnikovou křivku dvou rotačních ploch válcových, jejichž osy se protínají pod úhlem 60° a osy jsou přitom rovnoběžné s nárysnou. Rotační plochy válcové mají poloměr $r = 30$ s osou svislou a poloměr $r' = 25mm$ s osou nakloněnou. Sestrojte tečnu v obecném bodě průnikové čáry. Připojte i půdorys těchto válců a vyznačte v něm také průnikovou křivku s tečnou. (*Pro průnik užijte metodu soustředných pomocných kulových ploch. Pro tečnu užijte metodu normálových rovin.*) Obr.2 je jen orientační, zmenšený. Rýsujte podle údajů.

(5) Sestrojte průnik rotačního válce s rotačním kuželem, jejichž osy se protínají a leží v nárysně. Rotační válec má svislou osu ^1o, procházející bodem $Q[0,0,0]$ a poloměr $r = 30$, rotační kužel má osu $^2o = VS$ odkloněnou asi o 60° od osy svislé, vrchol kužele $V[-30,0,0]$, střed kruhové podstavy (kolmé k nárysně) $S[60,0,51]$, poloměr podstavy $^2r = 35$. Sestrojte v jednom bodě průnikové čáry její tečnu. (*Opět užijte pro průnikovou čáru metodu soustředných kulových ploch a pro tečnu průnikové čáry normálové roviny v průnikovém bodě čáry.*) Obr.3 je jen orientační, zmenšený. Rýsujte podle souřadnic.

Odevzdávejte poštou a najednou všechny příklady. Budou Vám vráceny opravené poštou přes děkanátne nebo na konzultacích. Poznámka při opravách „*znovu*“ znamená je přerýsovat.

Typeset by ZOBI–TEX
Mgr. Jan Šafařík