Test č. 1

Deskriptivní geometrie, I. ročník kombinovaného studia FAST, letní semestr 2009-2010

Kuželosečky, afinita a kolineace

(1) (a) Je dána elipsa $\mathcal{E}(F_1, F_2, a)$, $|F_1F_2| < 2a$. Sestrojte několik bodů elipsy, hyperoskulační kružnice, tečnu v libovolném bodě $T \in \mathcal{E}$, zkonstruujte kružnice z vět V_P, V_Q.

(b) Je dána elipsa $\mathcal{E}(A, B, e)$ a bod R. Sestrojte tečny z bodu R k elipse $\mathcal{E}$, určete body dotyku.

(c) Je dána elipsa $\mathcal{E}(A, B, e)$ a směr s. Sestrojte tečny rovnoběžné s daným směrem s k elipse $\mathcal{E}$, určete body dotyku.

(2) (a) Je dána hyperbola $\mathcal{H}(F_1, F_2, a)$, $|F_1F_2| > 2a$. Sestrojte několik bodů hyperboly, hyperoskulační kružnice, tečnu v libovolném bodě $T \in \mathcal{E}$, zkonstruujte kružnice z vět V_P, V_Q.

(b) Je dána hyperbola $\mathcal{H}(F_1, F_2, A)$ a bod R. Sestrojte tečny z bodu R k hyperbole $\mathcal{H}$, určete body dotyku.

(c) Je dána hyperbola $\mathcal{H}(A, B, e)$ a směr s. Sestrojte tečny rovnoběžné s daným směrem s k hyperbole $\mathcal{H}$, určete body dotyku.

Poznámka: Úloha nemá řešení pro směr s, pokud s', kde $s' \parallel s$, $S \in s$, neleží v úhlu asymptot obsahující vedlejší osu hyperboly $\mathcal{H}$.

(3) (a) Je dána parabola $\mathcal{P}(F, d)$. Sestrojte několik bodů paraboly, hyperoskulační kružnici, tečnu v libovolném bodě $T \in \mathcal{E}$, zkonstruujte přímky z vět V_P, V_Q.

(b) Je dána parabola $\mathcal{P}(F, d)$ a bod R. Sestrojte tečny z bodu R k parabole $\mathcal{P}$, určete body dotyku.

(c) Je dána parabola $\mathcal{P}(F, d)$ a směr s. Sestrojte tečny rovnoběžné s daným směrem s k parabole $\mathcal{P}$, určete body dotyku.

(4) K pravidelnému pětiúhelníku $ABCDE$ najděte afinní $A'B'C'D'E'$. Afinita je stanovena osou o a dvojicí bodů A, A'.

(5) Ve středové kolineaci (určené středem S, osou o, dvojicí bodů A, A')najděte k pravidelnému šestiúhelníku $ABCDEF$ kolineární.

(6) Ve středové kolineaci (S, o, $u \rightarrow {}_{\infty}u'$) sestrojte odpovídající přímky k přímkám a, b, c. (Poloha přímky a vůči ose o je různoběžná, b je s osou rovnoběžná, c je k ose kolmá), kde u je úběžnice, k níž koresponduje nevlastní přímka ${}_{\infty}u'$ roviny.

(7) Elipsa je určena sdruženými průměry KL, MN. Pomocí afinity sestrojte k nenarýsované elipse tečny z vnějšího bodu R.

(8) Elipsa je určena sdruženými průměry KL, MN. Pomocí afinity sestrojte k nenarýsované elipse tečny tak, aby byly rovnoběžné s daným směrem s.

Elipse e určené sdruženými průměry KL, MN přiřadíme afinně kružnici e' (např. nad průměrem KL, tedy $K \equiv K'$, $L \equiv L'$; $M \rightarrow M'$). Osa afinity $o \equiv KL$ a dvojice odpovídajících bodů M, M' určují afinitu.

(9) Elipsa je dána sdruženými průměry. Vyrýsujte elipsu (*Rytzova konstrukce* os elipsy).

I. Elipsa: Elipsa $\mathcal{E}$ je množina všech bodů v $\mathbb{E}_2$, které mají od dvou pevných (různých) bodů v $\mathbb{E}_2$, zvaných ohniska (značíme F_1, F_2) stálý součet vzdáleností rovný $2a$, který je větší než vzdálenost obou ohnisek.

Věta$_T$: Vkaždém bodě $\mathcal{E}$ existuje právě jedna tečna. Tečna půlí *vnější úhel průvodičů* (tečnu značíme obvykle t, dotykový bod T). Normála n je kolmá na tečnu t vbodě T a půlí *vnitřní úhel průvodičů.*

Věta$_P$: Množina pat P kolmic spuštěných z ohnisek elipsy $\mathcal{E}$ na její tečny je *vrcholová* kružnice $k(S, a)$.

Věta$_Q$: Množina bodů Q souměrně sdružených s jedním ohniskem elipsy $\mathcal{E}$ (například F_1) podle jejich tečen je *řídící* kružnice se středem v druhém ohnisku (F_2) a poloměrem $r = 2a$. Přitom platí $T \in QF_2$.

II. Hyperbola: Hyperbola $\mathcal{H}$ je množina všech bodů v $\mathbb{E}_2$, které mají od dvou pevných (různých) bodů v $\mathbb{E}_2$, zvaných ohniska (značíme F_1, F_2) stálý rozdíl vzdáleností rovný $2a$, který je menší než vzdálenost obou ohnisek.

Věta$_T$: Vkaždém bodě $\mathcal{H}$ existuje právě jedna tečna. Tečna půlí *vnější úhel průvodičů* (tečnu značíme obvykle t, dotykový bod T). Normála n je kolmá na tečnu t v bodě T a půlí *vnitřní úhel průvodičů.*

Věta$_P$: Množina pat P kolmic spuštěných z ohnisek hyperboly $\mathcal{H}$ na její tečny je *vrcholová* kružnice $k(S, a)$.

Věta$_Q$: Množina bodů Q souměrně sdružených s jedním ohniskem hyperboly $\mathcal{H}$ (například F_1) podle jejich tečen je *řídící* kružnice se středem v druhém ohnisku (F_2) a poloměrem $r = 2a$. Přitom platí $T \in QF_2$.

III. Parabola: Parabola $\mathcal{P}$ je množina všech bodů v $\mathbb{E}_2$, které mají od pevného bodu F v $\mathbb{E}_2$, zvaného ohnisko, a pevné přímky d, zvané řídící přímka, která tímto bodem neprochází, stejné vzdálenosti.

Věta$_T$: Vkaždém bodě $\mathcal{P}$ existuje právě jedna tečna. Tečna půlí vnější úhel průvodičů (tečnu značíme obvykle t, dotykový bod T). Normála n je kolmá na tečnu t v bodě T a půlí vnitřní úhel průvodičů. $\Longrightarrow t_V \parallel d$

Věta$_P$: Množina pat P kolmic spuštěných z ohniska F paraboly $\mathcal{P}$ na její tečny je vrcholová tečna t_V.

Věta$_Q$: Množina bodů Q, souměrně sdružených s ohniskem F podle tečen paraboly $\mathcal{P}$, je řídící přímka d.

Věta: Subtangenta je půlena vrcholem V.

Věta: Délka subnormály je rovna velikosti parametru p.

Odevzdávejte poštou a najednou všechny příklady. Budou Vám vráceny opravené poštou přes děkanát. Poznámka při opravách „znovu“ znamená přerýsovat příklad, poznámka „doplnit“ znamená dorýsovat daný příklad.

Mgr. Jan J. Šafařík
RNDr. Jana Slaběňáková
Typeset by LaTeX