

Kuželosečky

Příklad: Jsou dány křivky c_1 , c_2 . Napište, o jaké křivky se jedná, a určete jejich průsečíky:



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



Příklad: Jsou dány křivky c_1 , c_2 . Napište, o jaké křivky se jedná, a určete jejich průsečíky:

- a) $c_1 : 9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$, $c_2 : x - y - 3 = 0$;
- b) $c_1 : 4x^2 + 4y^2 - 12x + 20y - 162 = 0$, $c_2 : x = 0$;
- c) $c_1 : x^2 + y^2 = 4$, $c_2 : y = 3x + 2$;
- d) $c_1 : 16x^2 - 9y^2 - 32x + 54y - 209 = 0$, $c_2 : y = 0$.



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



Příklad: Jsou dány křivky c_1 , c_2 . Napište, o jaké křivky se jedná, a určete jejich průsečíky:

- a) $c_1 : 9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$, $c_2 : x - y - 3 = 0$;
- b) $c_1 : 4x^2 + 4y^2 - 12x + 20y - 162 = 0$, $c_2 : x = 0$;
- c) $c_1 : x^2 + y^2 = 4$, $c_2 : y = 3x + 2$;
- d) $c_1 : 16x^2 - 9y^2 - 32x + 54y - 209 = 0$, $c_2 : y = 0$.

Řešení: Určujeme-li průsečíky dvou křivek, řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



a) Křivka c_1 vyjádřená rovnicí $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$ je elipsa, její středový tvar je

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

má tedy střed $S = [0, 0]$, délky poloos $a = 4$, $b = 3$; $c_2 : x - y - 3 = 0$ je přímka.



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



a) Křivka c_1 vyjádřená rovnicí $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$ je elipsa, její středový tvar je

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

má tedy střed $S = [0, 0]$, délky poloos $a = 4$, $b = 3$; $c_2 : x - y - 3 = 0$ je přímka.

Rovnici přímky c_2 upravíme na tvar $x = y + 3$ a dosadíme ji do první rovnice:

$$9(y + 3)^2 + 16y^2 - 144 = 0 \implies 9(y^2 + 6y + 9) + 16y^2 - 144 = 0$$
$$\implies$$



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



a) Křivka c_1 vyjádřená rovnicí $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$ je elipsa, její středový tvar je

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

má tedy střed $S = [0, 0]$, délky poloos $a = 4$, $b = 3$; $c_2 : x - y - 3 = 0$ je přímka.

Rovnici přímky c_2 upravíme na tvar $x = y + 3$ a dosadíme ji do první rovnice:

$$\begin{aligned} 9(y+3)^2 + 16y^2 - 144 &= 0 \implies 9(y^2 + 6y + 9) + 16y^2 - 144 = 0 \\ &\implies 25y^2 + 54y - 63 = 0 \\ &\implies y_{1,2} = \end{aligned}$$



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



a) Křivka c_1 vyjádřená rovnicí $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$ je elipsa, její středový tvar je

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

má tedy střed $S = [0, 0]$, délky poloos $a = 4$, $b = 3$; $c_2 : x - y - 3 = 0$ je přímka.

Rovnici přímky c_2 upravíme na tvar $x = y + 3$ a dosadíme ji do první rovnice:

$$\begin{aligned} 9(y+3)^2 + 16y^2 - 144 &= 0 \implies 9(y^2 + 6y + 9) + 16y^2 - 144 = 0 \\ &\implies 25y^2 + 54y - 63 = 0 \\ &\implies y_{1,2} = \frac{-54 \pm \sqrt{54 + 100 \cdot 63}}{50} = \end{aligned}$$



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



a) Křivka c_1 vyjádřená rovnicí $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$ je elipsa, její středový tvar je

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

má tedy střed $S = [0, 0]$, délky poloos $a = 4$, $b = 3$; $c_2 : x - y - 3 = 0$ je přímka.

Rovnici přímky c_2 upravíme na tvar $x = y + 3$ a dosadíme ji do první rovnice:

$$\begin{aligned} 9(y+3)^2 + 16y^2 - 144 &= 0 \implies 9(y^2 + 6y + 9) + 16y^2 - 144 = 0 \\ &\implies 25y^2 + 54y - 63 = 0 \\ &\implies y_{1,2} = \frac{-54 \pm \sqrt{54 + 100 \cdot 63}}{50} = \frac{-54 \pm 96}{50} \\ &\implies \end{aligned}$$



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



a) Křivka c_1 vyjádřená rovnicí $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$ je elipsa, její středový tvar je

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

má tedy střed $S = [0, 0]$, délky poloos $a = 4$, $b = 3$; $c_2 : x - y - 3 = 0$ je přímka.

Rovnici přímky c_2 upravíme na tvar $x = y + 3$ a dosadíme ji do první rovnice:

$$\begin{aligned} 9(y+3)^2 + 16y^2 - 144 &= 0 \implies 9(y^2 + 6y + 9) + 16y^2 - 144 = 0 \\ &\implies 25y^2 + 54y - 63 = 0 \\ &\implies y_{1,2} = \frac{-54 \pm \sqrt{54 + 100 \cdot 63}}{50} = \frac{-54 \pm 96}{50} \\ &\implies y_1 = \frac{21}{25}, y_2 = -3. \end{aligned}$$

Dohromady máme

$$P_1 = \left[\frac{96}{25}, \frac{21}{25} \right], \quad P_2 = [0, -3].$$



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



b) Křivka

$$c_1 : 4x^2 + 4y^2 - 12x + 20y - 162 = 0$$

je kružnice, středový tvar (po úpravách a doplnění na úplný čtverec) je

$$\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{5}{2} \right)^2 = 49,$$



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



b) Křivka

$$c_1 : 4x^2 + 4y^2 - 12x + 20y - 162 = 0$$

je kružnice, středový tvar (po úpravách a doplnění na úplný čtverec) je

$$\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{5}{2} \right)^2 = 49,$$

střed kružnice je tedy $S = \left[\frac{3}{2}, -\frac{5}{2} \right]$, $r = 7$;



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



b) Křivka

$$c_1 : 4x^2 + 4y^2 - 12x + 20y - 162 = 0$$

je kružnice, středový tvar (po úpravách a doplnění na úplný čtverec) je

$$\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{5}{2} \right)^2 = 49,$$

střed kružnice je tedy $S = \left[\frac{3}{2}, -\frac{5}{2} \right]$, $r = 7$;

Rovnice $c_2 : x = 0$ popisuje souřadnicovou osu y .



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



b) Křivka

$$c_1 : 4x^2 + 4y^2 - 12x + 20y - 162 = 0$$

je kružnice, středový tvar (po úpravách a doplnění na úplný čtverec) je

$$\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{5}{2} \right)^2 = 49,$$

střed kružnice je tedy $S = \left[\frac{3}{2}, -\frac{5}{2} \right]$, $r = 7$;

Rovnice $c_2 : x = 0$ popisuje souřadnicovou osu y .

Průsečíky s osou y jsou tedy řešením kvadratické rovnice $4y^2 + 20y^2 - 162 = 0$ a jejich y -ové souřadnice jsou
 $y_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 + 16 \cdot 162}}{8} = \frac{-20 \pm 4 \cdot \sqrt{187}}{8} = \frac{-5 \pm \sqrt{187}}{2}$.



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



c) $c_1 : x^2 + y^2 = 4$ – kružnice; $c_2 : y = 3x + 2$ – přímka.



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



c) $c_1 : x^2 + y^2 = 4$ – kružnice; $c_2 : y = 3x + 2$ – přímka.

Postupujeme stejně jako v případě a) a dosadíme rovnici přímky do rovnice kružnice.



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



c) $c_1 : x^2 + y^2 = 4$ – kružnice; $c_2 : y = 3x + 2$ – přímka.

Postupujeme stejně jako v případě a) a dosadíme rovnici přímky do rovnice kružnice. Potom máme

$$x^2 + (3x + 2)^2 = 4 \quad \Rightarrow$$



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



c) $c_1 : x^2 + y^2 = 4$ – kružnice; $c_2 : y = 3x + 2$ – přímka.

Postupujeme stejně jako v případě a) a dosadíme rovnici přímky do rovnice kružnice. Potom máme

$$x^2 + (3x + 2)^2 = 4 \implies x^2 + 9x^2 + 12x + 4 = 4$$
$$\implies$$



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



c) $c_1 : x^2 + y^2 = 4$ – kružnice; $c_2 : y = 3x + 2$ – přímka.

Postupujeme stejně jako v případě a) a dosadíme rovnici přímky do rovnice kružnice. Potom máme

$$\begin{aligned} x^2 + (3x + 2)^2 &= 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 9x^2 + 12x + 4 = 4 \\ &\Rightarrow \quad 10x^2 + 12x = 0 \\ &\Rightarrow \end{aligned}$$



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



c) $c_1 : x^2 + y^2 = 4$ – kružnice; $c_2 : y = 3x + 2$ – přímka.

Postupujeme stejně jako v případě a) a dosadíme rovnici přímky do rovnice kružnice. Potom máme

$$\begin{aligned} x^2 + (3x + 2)^2 &= 4 \implies x^2 + 9x^2 + 12x + 4 = 4 \\ &\implies 10x^2 + 12x = 0 \\ &\implies 10x \left(x + \frac{6}{5} \right) = 0. \end{aligned}$$



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



c) $c_1 : x^2 + y^2 = 4$ – kružnice; $c_2 : y = 3x + 2$ – přímka.

Postupujeme stejně jako v případě a) a dosadíme rovnici přímky do rovnice kružnice. Potom máme

$$\begin{aligned} x^2 + (3x + 2)^2 &= 4 \implies x^2 + 9x^2 + 12x + 4 = 4 \\ &\implies 10x^2 + 12x = 0 \\ &\implies 10x \left(x + \frac{6}{5} \right) = 0. \end{aligned}$$

Řešením této kvadratické rovnice bez absolutního členu získáme dva průsečíky

$$P_1 = [0, 2], \quad P_2 = \left[-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5} \right].$$



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



d) $c_1 : 16x^2 - 9y^2 - 32x + 54y - 209 = 0$ je hyperbola, středová rovnice



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



d) $c_1 : 16x^2 - 9y^2 - 32x + 54y - 209 = 0$ je hyperbola, středová rovnice

$$\frac{(x - 1)^2}{9} - \frac{(y - 3)^2}{16} = 1,$$



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



d) $c_1 : 16x^2 - 9y^2 - 32x + 54y - 209 = 0$ je hyperbola, středová rovnice

$$\frac{(x - 1)^2}{9} - \frac{(y - 3)^2}{16} = 1,$$

střed hyperboly je $S = [1, 3]$, poloosy $a = 3$, $b = 4$, hlavní osa je rovnoběžná s osou x ;



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



d) $c_1 : 16x^2 - 9y^2 - 32x + 54y - 209 = 0$ je hyperbola, středová rovnice

$$\frac{(x - 1)^2}{9} - \frac{(y - 3)^2}{16} = 1,$$

střed hyperboly je $S = [1, 3]$, poloosy $a = 3$, $b = 4$, hlavní osa je rovnoběžná s osou x ; $c_2 : y = 0$ je osa x .



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



d) $c_1 : 16x^2 - 9y^2 - 32x + 54y - 209 = 0$ je hyperbola, středová rovnice

$$\frac{(x - 1)^2}{9} - \frac{(y - 3)^2}{16} = 1,$$

střed hyperboly je $S = [1, 3]$, poloosy $a = 3$, $b = 4$, hlavní osa je rovnoběžná s osou x ; $c_2 : y = 0$ je osa x .

Průsečíky s osou x najdeme jako řešení kvadratické rovnice $16x^2 - 32x - 209 = 0$.



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



d) $c_1 : 16x^2 - 9y^2 - 32x + 54y - 209 = 0$ je hyperbola, středová rovnice

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1,$$

střed hyperboly je $S = [1, 3]$, poloosy $a = 3$, $b = 4$, hlavní osa je rovnoběžná s osou x ; $c_2 : y = 0$ je osa x .

Průsečíky s osou x najdeme jako řešení kvadratické rovnice $16x^2 - 32x - 209 = 0$.

x -ové souřadnice průsečíků jsou pak $x_1 = \frac{19}{4}$, $x_2 = -\frac{11}{4} \implies P_1 = \left[\frac{19}{4}, 0 \right]$, $P_2 = \left[-\frac{11}{4}, 0 \right]$.



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]



Studijní opory pro vyrovnávací kurz z matematiky na FAST VUT vznikly v rámci projektu

Modernizace výuky na Fakultě stavební VUT v Brně v rámci bakalářských a magisterských studijních programů
registrační číslo: CZ.04.1.03/3.2.15.2/0292,

který byl spolufinancován z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu ČR prostřednictvím Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy v rámci operačního programu *Rozvoj lidských zdrojů*, opatření 3.3.

Oficiální definice ESF zní: *ESF napomáhá rozvoji zaměstnanosti podporou zaměstnatelnosti, podnikatelského ducha, rovných příležitostí a investicemi do lidských zdrojů.*



[Předchozí krok/Další krok] [Klikni zde pro ukončení]

