

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
FAKULTA STAVEBNÍ

---

JOSEF DALÍK, JIŘÍ VALA, OTO PŘIBYL

# NUMERICKÉ METODY II



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

STUDIJNÍ MATERIÁL

---

Tento studijní materiál byl zpracován s podporou projektu OPVK ESF *Rozvoj a modernizace doktorského studijního programu Stavební inženýrství [CZ.1.07/2.2.00/15.0428]*.  
© Ústav matematiky a deskriptivní geometrie FAST VUT v Brně, 2013

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Aproximace řešení eliptických okrajových úloh pro ODR 2. řádu metodou konečných prvků</b>	<b>6</b>
2.1	Klasická formulace úlohy . . . . .	6
2.2	Fyzikální význam . . . . .	6
2.3	Existence klasického řešení . . . . .	6
2.4	Galerkinova (slabá) formulace . . . . .	7
2.5	Diskretizace Galerkinovou metodou a metodou konečných prvků . . . . .	9
2.6	Řešené příklady . . . . .	11
2.7	Lineární konečný prvek a algoritmus MKP v 1D . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Regulární oblasti a integrovatelné funkce</b>	<b>22</b>
<b>4</b>	<b>Rovnice vedení tepla</b>	<b>27</b>
4.1	Odvození rovnice vedení tepla . . . . .	27
4.2	Klasická formulace okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici . . . . .	28
4.3	Variační formulace okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Diskretizace okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici metodou konečných prvků</b>	<b>31</b>
5.1	Po částech lineární funkce . . . . .	31
5.2	Metoda konečných prvků . . . . .	32
5.3	Algoritmizace . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Minimizační formulace úlohy (3.4), (3.5)</b>	<b>41</b>
<b>7</b>	<b>Obecná stacionární eliptická úloha</b>	<b>43</b>
7.1	Diskretizace variační formulace (5) . . . . .	44
<b>8</b>	<b>Nestacionární úloha vedení tepla</b>	<b>47</b>
<b>9</b>	<b>Nestacionární úloha konvekce-difúze</b>	<b>50</b>
<b>10</b>	<b>Další typy konečných elementů</b>	<b>53</b>
<b>11</b>	<b>Alternativní přístupy</b>	<b>58</b>
11.1	Modelová úloha . . . . .	58
11.2	Metoda konečných prvků . . . . .	60
11.3	Ritzova - Galerkinova metoda . . . . .	62
11.4	Metoda okrajových prvků . . . . .	63
11.5	Metoda konečných objemů . . . . .	64
11.6	Rotheho metoda . . . . .	66

11.7 Fourierova metoda . . . . .	68
----------------------------------	----

# 1 Úvod

Tento studijní text byl zpracován pro podporu studia předmětu doktorského studijního programu Numerické metody II na Fakultě stavební VUT v Brně. Jeho příprava byla podpořena projektem INODO (Inovace doktorského studia na FAST VUT v Brně, 2011-13) v rámci operačního programu ESF Vzdělávání pro konkurenceschopnost. Původním autorem textu, vycházejícím ze svých mnohaletých zkušeností s výukou numerické matematiky na všech úrovních studia na FAST, je doc. J. Dalík. Po jeho nečekaném úmrtí v roce 2013 jeho práci podle původního záměru dokončili prof. J. Vala a dr. O. Příbyl.

Posláním tohoto textu je seznámit studenty s moderními matematickými základy numerických a výpočtových přístupů používaných ve stavebním inženýrství i dalších technických disciplínách s důrazem na metodu konečných prvků. Další prohloubení těchto poznatků zůstává na vlastní iniciativě studentů i jejich školitelů; žádoucím, byť poněkud neskromným cílem přitom je, aby všechny závěrečné práce DSP na FAST vycházely z pochopení aktuálních matematických výsledků a rozvíjely původní výpočtové přístupy ve svých oborech a specializacích namísto matematiky 19. století a netvůřící aplikace komerčních i porůznu opatřených programových balíčků.

## 2 Aproximace řešení eliptických okrajových úloh pro ODR 2. řádu metodou konečných prvků

### 2.1 Klasická formulace úlohy

Pro danou funkci  $a^2 \in C^1\langle 0, l \rangle$ ,  $a^2(x) \geq a_0 > 0$  a funkce  $p, q, f \in C\langle 0, l \rangle$ ,  $q \geq 0$ , najděte  $y \in C^2\langle 0, l \rangle$  tak, aby byla splněna diferenciální rovnice

$$-(a^2 y')' + p y' + q y = f \quad \text{pro } x \in (0, l) \quad (1)$$

a pro  $x = 0$  i  $x = l$  jedna z *okrajových podmínek*

$$\begin{aligned} y(x) &= c \quad \text{Dirichletova nebo} \\ y'(x) &= d \quad \text{Neumannova nebo} \\ \alpha y(x) + \beta y'(x) &= \gamma \quad \text{Newtonova } (\alpha \neq 0 \neq \beta) \end{aligned}$$

### 2.2 Fyzikální význam

Existuje dlouhá řada různých fyzikálních významů této úlohy. Uvedeme dva z nich.

$y(x)$	teplota [koncentrace příměsi]
$a^2(x)$	koefficient tepelné vodivosti [koefficient difúze]
$p(x)$	rychlost toku
$f(x)$	intenzita zdrojů tepla [příměsi]
$q(x)$	koefficient absorpce

Výraz  $-a^2(x)y'(x)$  má význam intenzity toku v kladném směru osy  $x$ . Pak Neumannova okrajová podmínka určuje intenzitu toku přes hranici a Newtonova okrajová podmínka je podmínkou přestupu tepla [příměsi]. Pro  $x = l$

$$-a^2(l)y'(l) = \alpha(y(l) - y_{ext})$$

znamená, že intenzita toku je úměrná rozdílu mezi hodnotou  $y(l)$  v hraničním bodu  $l$  a hodnotou  $y_{ext}$  (teplotou [koncentrací příměsi] v exteriéru blízko bodu  $l$ ), vynásobeném koefficientem přestupu tepla [příměsi]  $\alpha > 0$ .

### 2.3 Existence klasického řešení

Předpokládejme, že funkce  $p(x)$  nemění znaménko v intervalu  $\langle 0, l \rangle$ . Je-li Dirichletova podmínka dána v bodu  $\left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{pro } p > 0, \\ l & \text{pro } p < 0, \end{array} \right\}$ , pak má klasická úloha pro ODR (1) jediné řešení.

V dalším textu budeme tuto podmínku, zaručující jednoznačné řešení klasické úlohy, považovat za splněnou.

## 2.4 Galerkinova (slabá) formulace

Pro určitost uvažme níže uvedenou úlohu (2), která vznikne z úlohy (1) volbou Dirichletovy podmínky v bodě 0 a Newtonovy podmínky v bodě  $l$ :

$$\begin{aligned} -(a^2 y')' + p y' + q y &= f \quad \text{pro } x \in (0, l), \\ y(0) &= \alpha_0, \quad -a^2(l) y'(l) = \beta_l + \gamma_1 y(l). \end{aligned} \quad (2)$$

Vynásobme obě strany rovnice (2) libovolnou *testovací funkcí*  $v \in C^1\langle 0, l \rangle$ ,  $0 = v(0)$ , a tyto součiny integrujme přes interval  $\langle 0, l \rangle$ :

$$\int_0^l (-(a^2 y')' + p y' + q y) v \, dx = \int_0^l f v \, dx. \quad (3)$$

**Symetrizace.**

$$\begin{aligned} - \int_0^l (a^2 y')' v \, dx &= \left| \begin{array}{l} -(a^2 y')' = \alpha' \quad v = \beta \\ -a^2 y' = \alpha \quad v' = \beta' \end{array} \right| = [-a^2 y' v]_0^l + \int_0^l a^2 y' v' \, dx \\ &= \int_0^l a^2 y' v' \, dx + \beta_l v(l) + \gamma_1 y(l) v(l). \end{aligned}$$

Po dosazení do (3) a převedení všech členů, které nezávisí na funkci  $y$  na pravou stranu, obdržíme

$$B(y, v) = L(v), \quad (4)$$

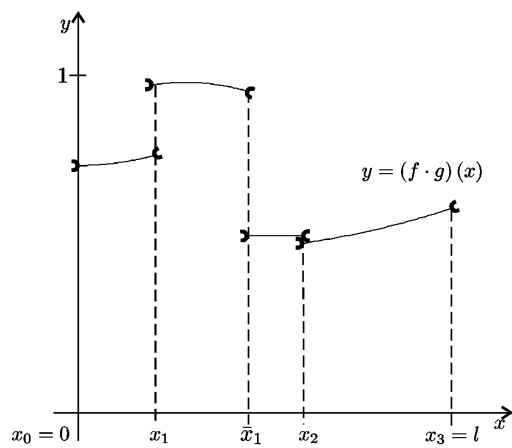
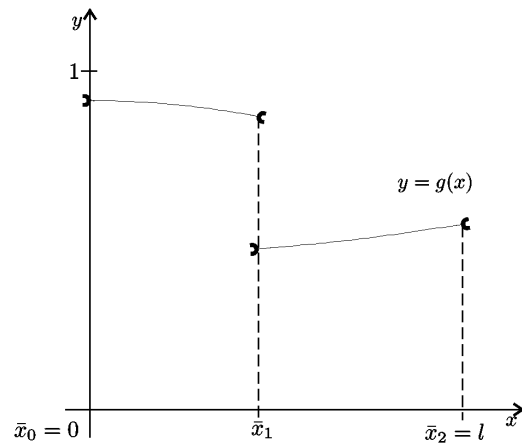
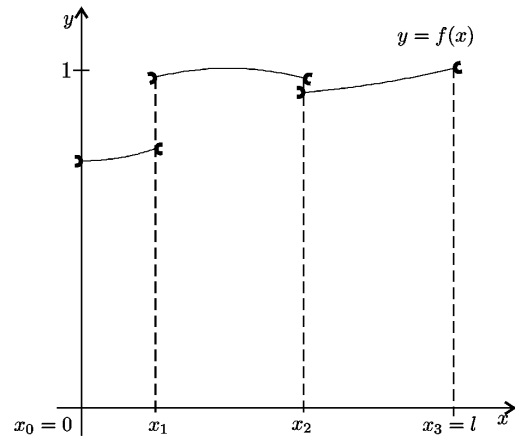
kde

$$\begin{aligned} B(y, v) &= \int_0^l (a^2 y' v' + p y' v + q y v) \, dx + \gamma_1 y(l) v(l) \quad \text{a} \\ L(v) &= \int_0^l f v \, dx - \beta_l v(l). \end{aligned}$$

Funkce  $\varphi$  je *po částech spojitá* na intervalu  $\langle 0, l \rangle$ , když má konečně mnoho možných bodů nespojitosti  $0 = x_0 < \dots < x_n = l$ , tj. pro  $i = 1, \dots, n$  platí  $\varphi \in C(x_{i-1}, x_i)$  a přitom mají jednostranné limity

$$\lim_{x \rightarrow x_{i-1}^+} \varphi(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_i^-} \varphi(x)$$

konečné hodnoty. Obr. 1 ilustruje skutečnost, že součin po částech spojitých funkcí je opět funkce po částech spojitá.



Obrázek 1: Příklady po částech spojitých funkcí.



Symbolem  $PC(0, l)$  označíme prostor funkcí po částech spojitých na intervalu  $\langle 0, l \rangle$ . Dále označíme symbolem  $PC^1(0, l)$  prostor funkcí  $\varphi$  z  $C\langle 0, l \rangle$  takových, že  $\varphi' \in PC(0, l)$ . Lze si snadno uvědomit, že výraz  $B(y, v)$  má konečnou hodnotu, jakmile  $y, v \in PC^1(0, l)$ .

Nazveme-li

$$W = \{w \in PC^1(0, l) | w(0) = \alpha_0\}$$

množinou přípustných řešení a

$$V = \{v \in PC^1(0, l) | v(0) = 0\}$$

prostorem testovacích funkcí, lze uvést tuto Galerkinovu (slabou) formulaci úlohy (2): Najděte funkci  $y \in W$  tak, aby

$$B(y, v) = L(v) \text{ pro všechny funkce } v \in V. \quad (5)$$

**Poznámka 1.** Z odvození Galerkinovy formulace úlohy plyne, že každé klasické řešení úlohy (1) je i řešením Galerkinovy (slabé) formulace. Naopak řešení Galerkinovy formulace zpravidla nejsou současně klasickými řešeními dané úlohy. Je-li však  $y \in C^2(0, l)$  a jsou-li splněny všechny další požadavky na hladkost klasického řešení, je řešení Galerkinovo též řešením klasickým.

**Poznámka 2.** V Galerkinově formulaci se explicitně neobjevuje Newtonova okrajová podmínka v bodě  $l$ . Tato podmínka je „zabudovaná“ do výrazů  $B(y, v)$  a  $L(v)$  a nazývá se *přirozená*. Naproti tomu splnění Dirichletovy podmínky je požadováno od všech přípustných řešení. Dirichletova podmínka se nazývá *podstatná*.

**Poznámka 3.** Lze snadno ukázat, že výraz  $B(y, v)$  je lineární vzhledem k funkcím  $y$  i  $v$ , tj. že

$$\begin{aligned} B(\alpha y + \beta z, v) &= \alpha B(y, v) + \beta B(z, v), \\ B(y, \gamma v + \delta w) &= \gamma B(y, v) + \delta B(y, w) \end{aligned}$$

platí pro všechna  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  a  $y, z, v, w \in PC^1(0, l)$ . Podobně platí

$$L(\alpha v + \beta w) = \alpha L(v) + \beta L(w)$$

pro všechna  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  a  $v, w \in PC^1(0, l)$ .

Říkáme, že  $B(y, v)$  je *bilineární forma* a  $L(v)$  nazýváme *lineární formou*.

## 2.5 Diskretizace Galerkinovou metodou a metodou konečných prvků

Jestliže  $y_0 \in W$  a funkce  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  leží v prostoru  $V$ , pak pro libovolné reálné koeficienty  $y_1, \dots, y_n$  leží funkce

$$y_G(x) = y_0(x) + y_1 \cdot \zeta_1(x) + \dots + y_n \cdot \zeta_n(x) \quad (6)$$

v množině  $W$ . Řekneme, že  $y_G$  je *aproximace* řešení úlohy (5), když

$$B(y_G, \zeta_i) = L(\zeta_i) \quad \text{pro } i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Dosadíme-li do (7) za  $y_G$  vyjádření (6) a využijeme-li bilinearity formy  $B(y, v)$ , vznikne systém rovnic

$$K\vec{y} = \vec{F}, \quad (8)$$

kde

$$K = \begin{bmatrix} B(\zeta_1, \zeta_1) & B(\zeta_2, \zeta_1) & \dots & B(\zeta_n, \zeta_1) \\ B(\zeta_1, \zeta_2) & B(\zeta_2, \zeta_2) & \dots & B(\zeta_n, \zeta_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(\zeta_1, \zeta_n) & B(\zeta_2, \zeta_n) & \dots & B(\zeta_n, \zeta_n) \end{bmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} \tilde{L}(\zeta_1) \\ \tilde{L}(\zeta_2) \\ \vdots \\ \tilde{L}(\zeta_n) \end{bmatrix}.$$

Zde  $\tilde{L}(\zeta_i) = L(\zeta_i) - B(y_0, \zeta_i)$  pro  $i = 1, 2, \dots, n$ .  $K$  se nazývá *matice tuhosti* a  $\vec{F}$  *vektor zatížení*.

**Metoda konečných prvků** je Galerkinova metoda, v níž jsou testovací funkce  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  zvoleny tak, aby matice tuhosti  $K$  byla pásová. Nazveme-li množinu

$$\text{supp}(\zeta_i) = \{x \in \langle 0, l \rangle \mid \zeta_i(x) \neq 0\}$$

*nosičem* funkce  $\zeta_i$  pro  $i = 1, \dots, n$ , pak

$$\text{supp}(\zeta_i) \cap \text{supp}(\zeta_j) = \emptyset \implies B(\zeta_i, \zeta_j) = 0. \quad (9)$$

Uvažme síť uzlů  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = l$  a označme  $h_i = x_i - x_{i-1}$  délku intervalu  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$  pro  $i = 1, \dots, n$ . Každému uzlu  $x_i$  přiřadíme lineární splajn  $\varphi_i(x)$  předpisem

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{pro } j = i \\ 0 & \text{pro } j \neq i \end{cases}.$$

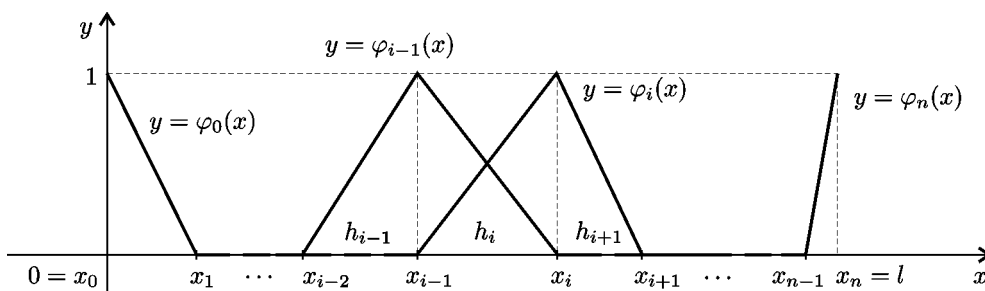
Z Obr. 2 je patrné, že  $\varphi_i \in PC^1(0, l)$ ,  $\text{supp}(\varphi_i) = (x_{i-1}, x_{i+1}) \cap \langle 0, l \rangle$  a

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_i & \text{pro } x \in (x_{i-1}, x_i) \cap \langle 0, l \rangle \\ (x_{i+1} - x)/h_{i+1} & \text{pro } x \in (x_i, x_{i+1}) \cap \langle 0, l \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \quad \varphi_i'(x) = \begin{cases} 1/h_i & \text{pro } x \in (x_{i-1}, x_i) \cap \langle 0, l \rangle \\ -1/h_{i+1} & \text{pro } x \in (x_i, x_{i+1}) \cap \langle 0, l \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (10)$$

pro  $i = 0, \dots, n$ . Odtud ihned plyne

$$|i - j| > 1 \implies \text{supp}(\varphi_j) \cap \text{supp}(\varphi_i) = \emptyset. \quad (11)$$

Vytvoříme-li aproximaci  $y_G$  pomocí těchto funkcí  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , pak z (9) a (11) plyne, že matice tuhosti je třídiagonální. Je výhodné, že pro výpočet hodnot prvků  $B(\varphi_{i-1}, \varphi_i)$  pod hlavní diagonálou stačí integrovat přes interval  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ , prvků  $B(\varphi_i, \varphi_i)$  v hlavní diagonále přes interval  $\langle x_{i-1}, x_{i+1} \rangle$  a prvků  $B(\varphi_i, \varphi_{i+1})$  nad hlavní diagonálou přes interval  $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ .



Obrázek 2: Ilustrace grafů funkcí  $\varphi_i$ .

## 2.6 Řešené příklady

**Příklad 1.1.** Řešení okrajové úlohy

$$-0,5y'' - y' = 1 \quad \text{v } (0, 1), \quad y(0) - y'(0) = 0, 2, \quad y(1) = 0$$

aproximujte metodou konečných prvků s ekvidistantními uzly s kroky 0,2 a 0,1.

*Řešení.* Položíme-li

$$V = \{v \in PC^1(0, l) \mid v(1) = 0\} = W,$$

pak pro řešení  $y$  a každou funkci  $v \in V$  platí

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-0,5y'' - y')v \, dx &= \left| \begin{array}{l} -0,5y'' = \alpha' \quad v = \beta \\ -0,5y' = \alpha \quad v' = \beta' \end{array} \right| = [-0,5y'v]_0^1 + \\ \int_0^1 (0,5y'v' - y'v) \, dx &= 0,5(y(0) - 0,2)v(0) + \int_0^1 (0,5y'v' - y'v) \, dx = \int_0^1 v \, dx. \end{aligned}$$

Tedy Galerkinova (slabá) formulace: Najděte  $y \in W$  tak, aby  $B(y, v) = L(v)$  pro všechna  $v \in V$ , když

$$B(y, v) = \int_0^1 (0,5y'v' - y'v) \, dx + 0,5y(0)v(0) \quad \text{a} \quad L(v) = \int_0^1 v \, dx + 0,1v(0).$$

Označme  $\varphi_j$  lineární splajn, příslušný uzlu  $x_j = 0,2j$  pro  $j = 0, 1, \dots, 5$  a položme  $h = 0,2$ . Pak funkce

$$y_h = y_0 \cdot \varphi_0 + \dots + y_4 \cdot \varphi_4$$

leží v množině  $W$ . Řekneme, že  $y_h$  je aproximací slabého řešení, jestliže

$$B(y_h, \varphi_i) = L(\varphi_i) \iff \sum_{j=0}^4 y_j B(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i)$$

pro  $i = 0, \dots, 4$ . Tedy koeficienty  $y_0, \dots, y_4$  jsou řešením systému rovnic

$$\begin{bmatrix} B(\varphi_0, \varphi_0) & B(\varphi_1, \varphi_0) & & & & & L(\varphi_0) \\ B(\varphi_0, \varphi_1) & B(\varphi_1, \varphi_1) & B(\varphi_2, \varphi_1) & & & & L(\varphi_1) \\ & B(\varphi_1, \varphi_2) & B(\varphi_2, \varphi_2) & B(\varphi_3, \varphi_2) & & & L(\varphi_2) \\ & & B(\varphi_2, \varphi_3) & B(\varphi_3, \varphi_3) & B(\varphi_4, \varphi_3) & & L(\varphi_3) \\ & & & B(\varphi_3, \varphi_4) & B(\varphi_4, \varphi_4) & & L(\varphi_4) \end{bmatrix}.$$

Přitom

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 5(0,2 - x) \\ 0 \end{cases}, \quad \varphi_0'(x) = \begin{cases} -5 & \text{pro } 0 < x < 0,2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \quad (12)$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 5(x - 0,2(i-1)) \\ 5(0,2(i+1) - x) \\ 0 \end{cases}, \quad \varphi_i'(x) = \begin{cases} 5 & \text{pro } 0,2(i-1) < x < 0,2i \\ -5 & \text{pro } 0,2i < x < 0,2(i+1) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (13)$$

pro  $i = 1, \dots, 4$  a Protože koeficienty v  $B(y, v)$  a  $L(v)$  jsou konstantní, nezávisí jejich hodnoty na „poloze“ funkcí  $\varphi_i$  v intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . Pak

$$B(\varphi_{i-1}, \varphi_i) = \int_{0,2(i-1)}^{0,2i} (0,5 \cdot (-5) \cdot 5 - (-5)\varphi_i) dx = -2,5 + 5 \cdot 0,1 = -2$$

pro  $i = 1, \dots, 4$ ,

$$B(\varphi_{i+1}, \varphi_i) = \int_{0,2i}^{0,2(i+1)} (0,5 \cdot 5 \cdot (-5) - 5\varphi_i) dx = -2,5 - 5 \cdot 0,1 = -3$$

pro  $i = 0, \dots, 3$ ,

$$B(\varphi_0, \varphi_0) = \int_0^{0,2} (0,5 \cdot 25 - (-5) \cdot \varphi_0) dx + 0,5 = 2,5 + 0,5 + 0,5 = 3,5 \quad \text{a}$$

$$\begin{aligned} B(\varphi_i, \varphi_i) &= \int_{0,2(i-1)}^{0,2i} (0,5 \cdot 5^2 - 5\varphi_i) dx \\ &+ \int_{0,2i}^{0,2(i+1)} (0,5 \cdot (-5)^2 - (-5)\varphi_i) dx = 5 \end{aligned}$$

pro  $i = 1, \dots, 4$ . Dále

$$L(\varphi_0) = \int_0^{0,2} \varphi_0(x) dx + 0,1 \cdot \varphi_0(0) = 0,1 + 0,1 = 0,2$$

a

$$L(\varphi_i) = \int_{0,2(i-1)}^{0,2(i+1)} \varphi_i(x) dx = 0,2.$$

Výsledný systém rovnic:

$$\begin{bmatrix} 3,5 & -3 & & & & \\ -2 & 5 & -3 & & & \\ & -2 & 5 & -3 & & \\ & & -2 & 5 & -3 & \\ & & & -2 & 5 & \\ & & & & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \left| \begin{matrix} 0,2 \\ 0,2 \\ 0,2 \\ 0,2 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{matrix} \right.$$

a jeho řešením je vektor

$$[0,45509; 0,46428; 0,40373; 0,29670; 0,15868]$$

hodnot aproximace  $y_h$  v uzlech 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8. Aproximace  $y_{h/2}$  nabývá v těchto uzlech hodnot

$$[0,45629; 0,46395; 0,40295; 0,29601; 0,15830].$$

Porovnání chyb s kroky  $h = 0,2$  a  $h/2 = 0,1$ :

$i$	0	1	2	3	4
$(y_h - y)(0,2i)$	-0,00160	0,00044	0,00103	0,00092	0,00042
$(y_{h/2} - y)(0,2i)$	-0,00040	0,00011	0,00025	0,00023	0,00012

Obecně je přesnost MKP a metody sítí na stejné úrovni.

**Příklad 1.2.** Najděte aproximaci řešení úlohy

$$-y'' + 20y' = 1 \quad \text{v } (0,1), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

metodou konečných prvků pro ekvidistantní uzly s krokem  $h = 0,2$ .

*Řešení.* Položíme  $V = \{v \in PC^1(0,1) \mid v(0) = 0 = v(1)\}$  a  $W = \{w \in PC^1(0,1) \mid w(0) = 0, w(1) = 1\}$ . Pro přesné řešení  $y$  a libovolnou testovací funkci  $v \in V$  platí

$$\int_0^1 (-y'' + 20y')v dx = \begin{vmatrix} -y'' = \alpha' & v = \beta \\ -y' = \alpha & v' = \beta' \end{vmatrix} = \int_0^1 (y'v' + 20y'v) dx = \int_0^1 v dx,$$

takže Galerkinova formulace zní: Najděte funkci  $y \in W$  tak, aby

$$B(y, v) = L(v) \quad \text{pro všechna } v \in V,$$

když

$$B(y, v) = \int_0^1 (y'v' + 20y'v) dx \quad \text{a} \quad L(v) = \int_0^1 v dx.$$

Pro aproximaci řešení této úlohy uijeme lineární splajny  $\varphi_0, \dots, \varphi_5$  příslušné uzlům  $x_j = 0,2j$ . Funkce

$$y_G = y_1 \cdot \varphi_1 + \dots + y_4 \cdot \varphi_4 + \varphi_5$$

leží v množině  $W$ .  $y_G$  je aproximací řešení úlohy, když

$$B(y_G, \varphi_i) = L(\varphi_i) \iff \sum_{j=1}^4 y_j B(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i) - B(\varphi_5, \varphi_i) \equiv \tilde{L}(\varphi_i)$$

pro  $i = 1, \dots, 4$ . Tento systém rovnic má vzhledem k (9) a (11) strukturu

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} B(\varphi_1, \varphi_1) & B(\varphi_2, \varphi_1) & & & \tilde{L}(\varphi_1) \\ B(\varphi_1, \varphi_2) & B(\varphi_2, \varphi_2) & B(\varphi_3, \varphi_2) & & \tilde{L}(\varphi_2) \\ & B(\varphi_2, \varphi_3) & B(\varphi_3, \varphi_3) & B(\varphi_4, \varphi_3) & \tilde{L}(\varphi_3) \\ & & B(\varphi_3, \varphi_4) & B(\varphi_4, \varphi_4) & \tilde{L}(\varphi_4) \end{array} \right],$$

Protože všechny koeficienty ve formách  $B(y, v)$  a  $L(v)$  jsou konstantní, platí

$$B(\varphi_{i-1}, \varphi_i) = \int_{0,2(i-1)}^{0,2i} ((-5) \cdot 5 + 20 \cdot (-5)\varphi_i) dx = -15$$

pro  $i = 2, \dots, 4$ ,

$$B(\varphi_i, \varphi_i) = \int_{0,2(i-1)}^{0,2i} (25 + 20 \cdot 5\varphi_i) dx + \int_{0,2i}^{0,2(i+1)} (25 + 20 \cdot (-5)\varphi_i) dx = 10$$

pro  $i = 1, \dots, 4$  a

$$B(\varphi_{i+1}, \varphi_i) = \int_{0,2i}^{0,2(i+1)} (5 \cdot (-5) + 20 \cdot 5\varphi_i) dx = 5$$

pro  $i = 1, \dots, 3$ . Dále

$$L(\varphi_i) = \int_0^1 \varphi_i(x) dx = 0,2$$

pro  $i = 1, \dots, 4$ . Tedy výsledný systém rovnic má tvar

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 10 & 5 & & & 0,2 \\ -15 & 10 & 5 & & 0,2 \\ & -15 & 10 & 5 & 0,2 \\ & & -15 & 10 & -4,8 \end{array} \right].$$

Jeho řešením je vektor  $[0,02557; -0,01115; 0,1902; -0,27148]$ . Tyto hodnoty aproximace  $y_h$  v uzlech 0,2; 0,4; 0,6; 0,8 jsou totožné s hodnotami aproximace metodou sítí z Př. 1.2. Aproximace  $y_G$  je nestabilní a matice výše uvedené soustavy není monotónní, stejně jako při použití metody sítí.

MKP je složitostí výsledných algoritmů i kvalitou získaných aproximací srovnatelná s metodou sítí. Její přednosti oproti metodě sítí se projevují v dimenzích 2 a 3 zejména v případech, kdy je oblast, na níž je daná úloha řešena, nepravidelná. Problémy MKP s nestabilitou jsou v podstatě stejné jako problémy metody sítí.

**Příklad 1.3.** Metodou konečných prvků s krokem 0,25 aproximujte stacionární rozložení teploty látky s tepelnou vodivostí  $0,4 \text{ W}/(\text{m}^0\text{C})$  v intervalu délky 1 m. Látka vtéká do intervalu o teplotě  $1^0\text{C}$ , protéká jím rychlostí 1 m/s a z intervalu vytéká do prostředí o vnější teplotě  $0,2^0\text{C}$  s přestupovým koeficientem  $2 \text{ W}/(\text{m}^2^0\text{C})$ .

Z fyzikálního významu úlohy (1) plyne, že hledaná teplota  $y(x)$  pro  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  je řešením okrajové úlohy

$$-0,4y'' + y' = 0 \quad \text{v } (0, 1), \quad y(0) = 1, \quad -0,4y'(1) = 2(y(1) - 0,2).$$

*Řešení.* Položíme  $V = \{v \in PC^1(0,1) \mid v(0) = 0\}$  a  $W = \{w \in PC^1(0,1) \mid w(0) = 1\}$ . Pro přesné řešení  $y$  a libovolnou testovací funkci  $v \in V$  platí

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-0,4y'' + y')v \, dx &= \left| \begin{array}{l} -0,4y'' = \alpha' \quad v = \beta \\ -0,4y' = \alpha \quad v' = \beta' \end{array} \right| \\ &= [-0,4y'v]_0^1 + \int_0^1 (0,4y'v' + y'v) \, dx \\ &= 2(y(1) - 0,2)v(1) + \int_0^1 (0,4y'v' + y'v) \, dx = 0, \end{aligned}$$

takže Galerkinova formulace zní: Najděte funkci  $y \in W$  tak, aby

$$B(y, v) = L(v) \quad \text{pro všechna } v \in V,$$

když

$$B(y, v) = \int_0^1 (0,4y'v' + y'v) \, dx + 2y(1)v(1) \quad \text{a} \quad L(v) = 0,4v(1).$$

Pro aproximaci řešení této úlohy použijeme lineární splajny  $\varphi_0, \dots, \varphi_4$  příslušné uzlům  $x_j = 0,25j$ . Funkce

$$y_G = \varphi_0 + y_1 \cdot \varphi_1 + \dots + y_4 \cdot \varphi_4$$

leží v množině  $W$ .  $y_G$  je aproximací řešení úlohy, když

$$B(y_G, \varphi_i) = L(\varphi_i) \iff \sum_{j=1}^4 y_j B(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i) - B(\varphi_0, \varphi_i)$$

pro  $i = 1, \dots, 4$ . Tento systém rovnic má vzhledem k (9) a (11) strukturu

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} B(\varphi_1, \varphi_1) & B(\varphi_2, \varphi_1) & & & L(\varphi_1) - B(\varphi_0, \varphi_1) \\ B(\varphi_1, \varphi_2) & B(\varphi_2, \varphi_2) & B(\varphi_3, \varphi_2) & & L(\varphi_2) \\ & B(\varphi_2, \varphi_3) & B(\varphi_3, \varphi_3) & B(\varphi_4, \varphi_3) & L(\varphi_3) \\ & & B(\varphi_3, \varphi_4) & B(\varphi_4, \varphi_4) & L(\varphi_4) \end{array} \right],$$

Protože všechny koeficienty ve formách  $B(y, v)$  a  $L(v)$  jsou konstantní, platí

$$B(\varphi_{i-1}, \varphi_i) = \int_{0,25(i-1)}^{0,25i} (0,4(-5) \cdot 5 + (-4)\varphi_i) dx = -2,1$$

pro  $i = 1, \dots, 4$ ,

$$B(\varphi_i, \varphi_i) = \int_{0,25(i-1)}^{0,25i} (0,4 \cdot 16 + 4\varphi_i) dx + \int_{0,25i}^{0,25(i+1)} (0,4 \cdot 16 - 4\varphi_i) dx = 3,2$$

pro  $i = 1, 2, 3$ ,

$$B(\varphi_4, \varphi_4) = \int_{0,75}^1 (0,4 \cdot 16 + 4\varphi_4) dx + 2 = 1,6 + 0,5 + 2 = 4,1 \quad \text{a}$$

$$B(\varphi_{i+1}, \varphi_i) = \int_{0,25i}^{0,25(i+1)} (0,4 \cdot 5 \cdot (-5) + 4\varphi_i) dx = -1,1$$

pro  $i = 1, \dots, 3$ . Dále

$$L(\varphi_1) - B(\varphi_0, \varphi_1) = 2,1$$

a

$$L(\varphi_2) = 0 = L(\varphi_3), \quad L(\varphi_4) = 0,4.$$



Tedy výsledný systém rovnic má tvar

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 3,2 & -1,1 & & & 2,1 \\ -2,1 & 3,2 & -1,1 & & 0 \\ & -2,1 & 3,2 & -1,1 & 0 \\ & & -2,1 & 4,1 & 0,4 \end{array} \right].$$

Jeho řešením je vektor  $[0,96157; 0,88821; 0,74815; 0,48076]$ . Toto jsou hodnoty aproximace  $y_G$  v uzlech  $0,25; 0,5; 0,75; 1$ .

**Příklad 1.4.** Najděte aproximaci řešení úlohy

$$-y'' - 5y' = -1 \quad \text{v } (0, 1), \quad -y'(0) = 0,5(1 - y(0)), \quad y(1) = 1$$

metodou konečných prvků s krokem  $h = 0,2$ .

*Řešení.* Položíme  $V = \{v \in PC^1(0, 1) \mid v(1) = 0\}$  a  $W = \{w \in PC^1(0, 1) \mid w(1) = 1\}$ . Pro přesné řešení  $y$  a libovolnou testovací funkci  $v \in V$  platí

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-y'' - 5y')v \, dx &= \left| \begin{array}{l} -y'' = \alpha' \quad v = \beta \\ -y' = \alpha \quad v' = \beta' \end{array} \right| \\ &= [-y'v]_0^1 + \int_0^1 (y'v' - 5y'v) \, dx \\ &= 0,5(y(0) - 1)v(0) + \int_0^1 (y'v' - 5y'v) \, dx = - \int_0^1 v \, dx, \end{aligned}$$

takže Galerkinova formulace zní: Najděte funkci  $y \in W$  tak, aby

$$B(y, v) = L(v) \quad \text{pro všechna } v \in V,$$

když

$$B(y, v) = \int_0^1 (y'v' - 5y'v) \, dx + 0,5y(0)v(0) \quad \text{a} \quad L(v) = - \int_0^1 v \, dx + 0,5v(0).$$

Pro aproximaci řešení této úlohy uijeme lineární splajny  $\varphi_0, \dots, \varphi_5$  příslušné uzlům  $x_j = 0,2j$ .

*Diskretizace:* Funkce

$$y_G = y_0 \cdot \varphi_0 + \dots + y_4 \cdot \varphi_4 + \varphi_5$$

leží v množině  $W$ .  $y_G$  je aproximací řešení úlohy, když

$$B(y_G, \varphi_i) = L(\varphi_i) \iff \sum_{j=0}^4 y_j B(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i) - B(\varphi_5, \varphi_i)$$

pro  $i = 0, \dots, 4$ . Tento systém rovnic má vzhledem k (9) a (11) strukturu

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} B(\varphi_0, \varphi_0) & B(\varphi_1, \varphi_0) & & & L(\varphi_0) \\ B(\varphi_0, \varphi_1) & B(\varphi_1, \varphi_1) & B(\varphi_2, \varphi_1) & & L(\varphi_1) \\ & B(\varphi_1, \varphi_2) & B(\varphi_2, \varphi_2) & B(\varphi_3, \varphi_2) & L(\varphi_2) \\ & & B(\varphi_2, \varphi_3) & B(\varphi_3, \varphi_3) & B(\varphi_4, \varphi_3) & L(\varphi_3) \\ & & & B(\varphi_3, \varphi_4) & B(\varphi_4, \varphi_4) & L(\varphi_4) - B(\varphi_5, \varphi_4) \end{array} \right],$$

Protože všechny koeficienty ve formách  $B(y, v)$  a  $L(v)$  jsou konstantní, platí

$$B(\varphi_{i-1}, \varphi_i) = \int_{0,2(i-1)}^{0,2i} ((-25) + 25\varphi_i) dx = -5 + 2,5 = -2,5$$

pro  $i = 1, \dots, 4$ ,

$$B(\varphi_0, \varphi_0) = 5 + 25 \int_0^{0,2} \varphi_0 dx + 0,5 = 8$$

$$B(\varphi_i, \varphi_i) = \int_{0,2(i-1)}^{0,2i} (25 - 25\varphi_i) dx + \int_{0,2i}^{0,2(i+1)} (25 + 25\varphi_i) dx = 10$$

pro  $i = 1, \dots, 4$  a

$$B(\varphi_{i+1}, \varphi_i) = \int_{0,2i}^{0,2(i+1)} (-25 - 5 \cdot 5\varphi_i) dx = -5 - 25 \cdot 0,1 = -7,5$$

pro  $i = 0, \dots, 4$ . Dále

$$L(\varphi_0) = -0,1 + 0,5 = 0,4$$

a

$$L(\varphi_i) = - \int_{0,2(i-1)}^{0,2(i+1)} \varphi_i dx = -0,2.$$

Tedy výsledný systém rovnic má tvar

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 8 & -7,5 & & & 0,4 \\ -2,5 & 10 & -7,5 & & -0,2 \\ & -2,5 & 10 & -7,5 & -0,2 \\ & & -2,5 & 10 & -7,5 & -0,2 \\ & & & -2,5 & 10 & 7,3 \end{array} \right].$$

Jeho řešením je vektor  $[0,85434; 0,85796; 0,88584; 0,92180; 0,96045]$ . Toto jsou hodnoty aproximace  $y_G$  v uzlech  $0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ .

## 2.7 Lineární konečný prvek a algoritmus MKP v 1D

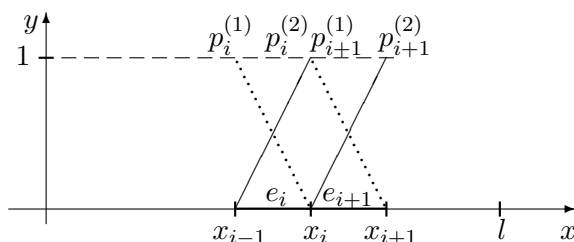
Diskretizace Galerkinovy úlohy

$$\text{najděte } y \in W \text{ tak, aby } B(y, v) = L(v) \text{ pro všechna } v \in V \quad (14)$$

metodou konečných prvků je určena dělením  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = l$ . Pak je pro  $i = 1, \dots, n$  *konečný prvek (element)*  $e_i$  určen

- *intervalem*  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ ,
- *lokálním prostorem*  $\mathcal{P}_i^1$  polynomů stupně menšího nebo rovného 1 na intervalu  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$  a
- *stupni volnosti*  $p(x_{i-1}), p(x_i)$ , které mohou být zvoleny libovolně a určují polynom  $p \in \mathcal{P}_i^1$  jednoznačně.

Pro  $i = 1, \dots, n$  označíme  $p_i^{(1)}, p_i^{(2)}$  bazi lokálního prostoru  $\mathcal{P}_i^1$  takovou, že  $p_i^{(1)}(x_{i-1}) = 1, p_i^{(1)}(x_i) = 0$  a  $p_i^{(2)}(x_{i-1}) = 0, p_i^{(2)}(x_i) = 1$ . Viz Obrázek 3.



Obrázek 3. Baze lokálních prostorů  $\mathcal{P}_i^1$  a  $\mathcal{P}_{i+1}^1$

Je zřejmé, že

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} p_1^{(1)}(x) & \text{pro } x \in \langle x_0, x_1 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases},$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} p_i^{(2)}(x) & \text{pro } x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle \\ p_{i+1}^{(1)}(x) & \text{pro } x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad \text{pro } i = 1, \dots, n-1 \text{ a}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} p_n^{(2)}(x) & \text{pro } x \in \langle x_{n-1}, x_n \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Odtud plyne, že

$$\begin{aligned} B(\varphi_{i-1}, \varphi_i) &= B(p_i^{(1)}, p_i^{(2)}) \quad \text{pro } i = 1, \dots, n, \\ B(\varphi_0, \varphi_0) &= B(p_1^{(1)}, p_1^{(1)}), \\ B(\varphi_i, \varphi_i) &= B(p_i^{(2)}, p_i^{(2)}) + B(p_{i+1}^{(1)}, p_{i+1}^{(1)}) \quad \text{pro } i = 1, \dots, n-1, \\ B(\varphi_n, \varphi_n) &= B(p_n^{(2)}, p_n^{(2)}) \text{ a} \\ B(\varphi_{i+1}, \varphi_i) &= B(p_{i+1}^{(2)}, p_{i+1}^{(1)}) \quad \text{pro } i = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

a podobně

$$\begin{aligned} L(\varphi_0) &= L(p_1^{(1)}), \\ L(\varphi_i) &= L(p_i^{(2)}) + L(p_{i+1}^{(1)}) \quad \text{pro } i = 1, \dots, n-1 \quad \text{a} \\ L(\varphi_n) &= L(p_n^{(2)}). \end{aligned}$$

Tedy například pro  $n = 2$  lze systém rovnic

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} B(\varphi_0, \varphi_0) & B(\varphi_1, \varphi_0) & & L(\varphi_0) \\ B(\varphi_0, \varphi_1) & B(\varphi_1, \varphi_1) & B(\varphi_2, \varphi_1) & L(\varphi_1) \\ & B(\varphi_1, \varphi_2) & B(\varphi_2, \varphi_2) & L(\varphi_2) \end{array} \right]$$

zapsat podrobněji

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} B(p_1^{(1)}, p_1^{(1)}) & & B(p_1^{(2)}, p_1^{(1)}) & L(p_1^{(1)}) \\ B(p_1^{(1)}, p_1^{(2)}) & B(p_1^{(2)}, p_1^{(2)}) + B(p_2^{(1)}, p_2^{(1)}) & B(p_2^{(2)}, p_2^{(1)}) & L(p_1^{(2)}) + L(p_2^{(1)}) \\ & B(p_2^{(1)}, p_2^{(2)}) & B(p_2^{(2)}, p_2^{(2)}) & L(p_2^{(2)}) \end{array} \right]$$

*Algoritmus sestavení matice tuhosti  $K$  a vektoru zatížení  $\vec{F}$ :*

1. Vynulování matice  $K$  a vektoru  $\vec{F}$ .
2. Postupně pro  $i = 1, \dots, n$  výpočet *lokální matice tuhosti a lokálního vektoru zatížení*

$$K^{(i)} = \begin{bmatrix} B(p_i^{(1)}, p_i^{(1)}) & B(p_i^{(2)}, p_i^{(1)}) \\ B(p_i^{(1)}, p_i^{(2)}) & B(p_i^{(2)}, p_i^{(2)}) \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \vec{F}^{(i)} = \begin{bmatrix} L(p_i^{(1)}) \\ L(p_i^{(2)}) \end{bmatrix}$$

a přičtení

$$\begin{array}{ccc} K_{11}^{(i)} \text{ k } K_{i,i}, & K_{12}^{(i)} \text{ k } K_{i,i+1} & \text{a} \quad \vec{F}_1^{(i)} \text{ k } \vec{F}_i \\ K_{21}^{(i)} \text{ k } K_{i+1,i}, & K_{22}^{(i)} \text{ k } K_{i+1,i+1} & \text{a} \quad \vec{F}_2^{(i)} \text{ k } \vec{F}_{i+1} \end{array}$$

### Otázky a příklady k procvičení

1. Uveďte klasickou formulaci eliptické okrajové úlohy pro ODR 2. řádu, hlavní fyzikální významy a postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost jejího řešení.
2. Popište některou fyzikální interpretaci procesu, popsaného okrajovou úlohou

a)  $-0,1y'' + 2y' = 1$  v  $(0, 1)$ ,  $y(0) = 1$ ,  $-0,1y'(1) = 2(y(1) - 0,2)$ .

b)  $-0,05y'' + y = x$  v  $(0, 1)$ ,  $y'(0) = 5$ ,  $y'(1) + 10y(1) = 6$ .

Těchto fyzikálních významů užitje ke schematickému znázornění grafů řešení úloh a) a b).

3. Metodou konečných prvků aproximujte řešení okrajové úlohy

a)  $-0,5y'' + y' = 2$ ,  $y(0) = -1$ ,  $-0,4y'(1) = 2y(1)$  s krokem  $h = 1/4$ ,

b)  $-0,25y'' - y' = 1$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$  s krokem  $h = 1/6$ ,

c)  $-0,1y'' - y' = 1$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$  s krokem  $h = 1/6$ ,

d)  $-y'' - 0,2y' = 2$ ,  $y'(0) = 2(y(0) - 0,5)$ ,  $y(1) = 0$  s krokem  $h = 1/5$ .

### 3 Regulární oblasti a integrovatelné funkce

Tučnými symboly  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$  budeme značit body  $(x_1, x_2), (y_1, y_2), \dots$  z  $\mathbb{R}^2$  a symbol  $\mathbf{o}$  rezervujeme pro *nulový bod*  $(0, 0)$ . Pro body  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  a  $\delta > 0$  položíme

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \text{ a } O_\delta(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y}; \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta\}.$$

Množinu  $O_\delta(\mathbf{x})$  nazveme  $\delta$ -okolím bodu  $\mathbf{x}$  (v  $\mathbb{R}^2$ ).

**Definice.** Množina  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  se nazývá

- otevřená*, když  $\forall \mathbf{x} \in \Omega \exists \delta > 0 : O_\delta(\mathbf{x}) \subseteq \Omega$ ,
- uzavřená*, když  $\mathbb{R}^2 - \Omega$  je otevřená,
- ohraničená*, když  $\exists \delta > 0 : \Omega \subseteq O_\delta(\mathbf{o})$ ,
- souvislá*, když její libovolné dva body lze spojit lomenou čarou v  $\Omega$  a
- oblast*, je-li otevřená a souvislá.

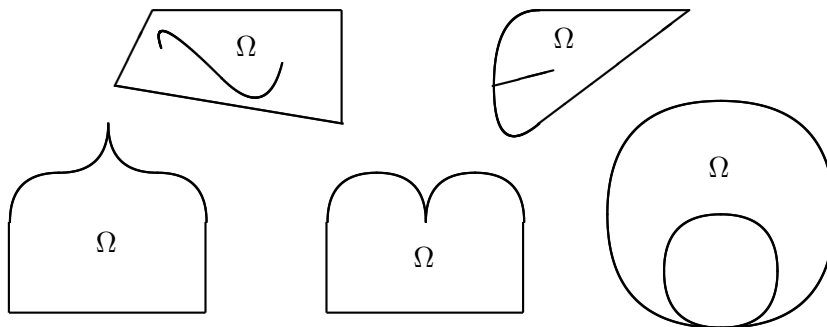
*Hraniční bod* množiny  $\Omega$  je každý bod  $\mathbf{x}$  s vlastností

$$\forall \delta > 0 : (O_\delta(\mathbf{x}) - \{\mathbf{x}\}) \cap \Omega \neq \emptyset \text{ a } (O_\delta(\mathbf{x}) - \{\mathbf{x}\}) \cap (\mathbb{R}^2 - \Omega) \neq \emptyset$$

Množina všech hraničních bodů  $\Omega$  se nazývá *hranice*  $\Omega$  a značí se  $\partial\Omega$  a sjednocení  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  se nazývá *uzávěr*  $\Omega$ .  $\bar{\Omega}$  je nejmenší uzavřená množina, která je nadmnožinou  $\Omega$ .

**Definice.** a) *Řez* oblasti  $\Omega$  je neprázdná podmnožina v  $\partial\Omega - \Omega$ , jejíž všechny body jsou vnitřními body uzávěru  $\bar{\Omega}$ .

b) *Bod vratu* oblasti  $\Omega$  je každý bod dotyku dvou různých hladkých částí hranice  $\partial\Omega$ , v němž jsou tečny k oběma hladkým částem totožné.



Obrázek 4. Ilustrace oblastí s řezy a s body vratu

**Definice.** Oblast  $\Omega$  nazveme *regulární*, je-li ohraničená, hranice  $\partial\Omega$  je sjednocením konečného počtu hladkých křivek a nemá řezy ani body vratu.

**Definice.** Jednotková vnější normála oblasti  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  v bodě  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  je vektor  $\vec{n} = \vec{n}(\mathbf{x})$  s vlastnostmi

- a)  $\vec{n}$  je kolmý k  $\partial\Omega$  ( $\vec{n}(\mathbf{x})$  je kolmý k tečně k  $\partial\Omega$  v bodu dotyku  $\mathbf{x}$ ),
- b)  $\vec{n}$  vychází z bodu  $\mathbf{x}$  ven z  $\Omega$  (existuje  $\delta > 0$  tak, že  $\mathbf{x} + t \cdot \vec{n} \notin \Omega$  pro všechna  $t \in (0, \delta)$ ) a
- c)  $|\vec{n}| = 1$ .

Regulární oblast má jednoznačně určenou jednotkovou vnější normálu ve všech bodech  $\partial\Omega$  s případnou výjimkou konečně mnoha bodů.

**Definice.** (Prostory integrovatelných funkcí na regulární oblasti) Pro danou regulární oblast  $\Omega$  se značí

- a)  $L_2(\Omega)$  množina reálných funkcí  $u$  takových, že odmocnina Lebesgueova integrálu

$$\|u\|_0 = \sqrt{\int_{\Omega} u^2 d\mathbf{x}}$$

existuje a má konečnou hodnotu,

- b)  $H^1(\Omega)$  množina funkcí  $u$ , pro něž  $u$ ,  $\partial u/\partial x_1$  a  $\partial u/\partial x_2$  leží v  $L_2(\Omega)$  a
- c)  $H^2(\Omega)$  množina funkcí  $u$ , pro něž  $u$ ,  $\partial u/\partial x_1$ ,  $\partial u/\partial x_2$ ,  $\partial^2 u/\partial x_1^2$ ,  $\partial^2 u/\partial x_1 \partial x_2$  a  $\partial^2 u/\partial x_2^2$  leží v  $L_2(\Omega)$ .

Množiny funkcí  $L_2(\Omega)$ ,  $H^1(\Omega)$  a  $H^2(\Omega)$  jsou funkční prostory (jsou například uzavřené vůči tvorbě lineárních kombinací funkcí) a číslo  $\|u\|_0$  je norma funkce  $u$  v prostoru  $L_2(\Omega)$ . Podobně

$$\|u\|_1 = \sqrt{\int_{\Omega} [u^2 + (\partial u/\partial x_1)^2 + (\partial u/\partial x_2)^2] d\mathbf{x}}$$

je norma funkce  $u$  v prostoru  $H^1(\Omega)$ .

**Poznámka.** (Prostory integrovatelných funkcí na ohraničeném intervalu) Pro libovolný ohraničený interval  $(a, b)$  značí  $L_2(a, b)$  množinu všech funkcí  $y = y(x)$  takových, že

$$\|y\|_0 = \sqrt{\int_a^b y^2 dx}$$

existuje a má konečnou hodnotu. Pro libovolnou ohraničenou, po částech hladkou křivku  $\Gamma$  označíme  $L_2(\Gamma)$  množinu všech funkcí  $y = y(x)$  takových, že odmocnina z křivkového Lebesgueova integrálu

$$\|y\|_0 = \sqrt{\int_{\Gamma} y^2 ds}$$

existuje a má konečnou hodnotu. Stejně jako v dimenzi 2, i množiny  $L_2(a, b)$  a  $L_2(\Gamma)$ , zejména  $L_2(\partial\Omega)$  pro regulární oblast  $\Omega$ , jsou funkční prostory s normou  $\|\cdot\|_0$ . Dobrou představu o funkcích, které leží v těchto prostorech poskytují funkce po částech spojitě, neboť  $PC(a, b) \subset L_2(a, b)$ . Analogicky jako v dimenzi 2 je definován funkční prostor  $H^1(a, b)$  s normou  $\|\cdot\|_1$ . Opět  $PC^1(a, b) \subset H^1(a, b)$ .

Předpis, který k funkcím  $u, v$  definovaným na regulární oblasti  $\Omega$ , ohraničeném intervalu  $(a, b)$  případně na ohraničené po částech hladké křivce  $\Gamma$  přiřadí číslo

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv d\mathbf{x}, \quad \langle u, v \rangle = \int_a^b uv dx \quad \text{případně} \quad \langle u, v \rangle = \int_{\Gamma} uv ds$$

je skalární součin funkcí. Díky Schwarzově nerovnosti  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_0 \|v\|_0$  je tento skalární součin definován na prostorech  $L_2(\Omega)$ ,  $L_2(a, b)$  a  $L_2(\Gamma)$ .

Je zřejmé, že  $C^k(\overline{\Omega}) \subset H^k(\Omega)$  pro  $k = 0, 1, 2$ . Otázka je, zda z integrability derivací funkcí plyne spojitost funkcí.

**Věta 1.** (Sobolevovy věty o vnoření) Platí

$$\begin{aligned} H^1(a, b) &\subset C(a, b) \quad \text{pro libovolná} \quad -\infty < a < b < \infty \quad \text{a} \\ H^2(\Omega) &\subset C(\overline{\Omega}) \quad \text{pro každou regulární oblast} \quad \Omega. \end{aligned}$$

Z tvrzení Věty 1 zejména plyne, že každá funkce z  $H^2(\Omega)$  je definovaná a spojitá na celé hranici  $\partial\Omega$ . Otázku, jaké vlastnosti na hranici  $\partial\Omega$  mají funkce z  $H^1(\Omega)$ , zodpovídá Věta 2.

**Věta 2.** (Věta o stopách) Je-li  $\Omega$  regulární oblast, pak existuje jediný lineární operátor

$$\gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow L_2(\partial\Omega)$$

takový, že  $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$  pro všechna  $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$  a existuje konstanta  $C > 0$  tak, že

$$\|\gamma(u)\|_0 \leq C \|u\|_1 \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Funkce  $\gamma(u)$  se nazývá *stopa* funkce  $u$ . Místo  $\gamma(u)$  píšeme  $u$ . Množina všech stop funkcí z  $H^1(\Omega)$  je funkční prostor  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ . Je zřejmé, že  $H^{1/2}(\partial\Omega) \subseteq L_2(\partial\Omega)$ .



**Definice.** Pro regulární oblast  $\Omega$  a funkci  $u \in H^1(\Omega)$  označíme  $\nabla u = \text{grad } u = [\partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2]^\top$ .

Pro libovolný jednotkový vektor  $\vec{s} = [s_1, s_2]^\top$  a funkci  $u \in H^1(\Omega)$  platí:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial u}{\partial x_1} s_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} s_2 = \nabla u \cdot \vec{s}.$$

**Definice.** Pro libovolnou vektorovou funkci  $\vec{u}(\mathbf{x}) = [u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x})]^\top$  s  $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$  označíme

$$\text{div } \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

a  $\text{div } \vec{u}$  nazveme *divergence* vektorové funkce  $u$ .

Je-li  $\vec{u}$  vektor toku nestlačitelné kapaliny, pak  $\text{div } \vec{u} = 0$ .

**Poznámka.** Jestliže  $u \in H^2(\Omega)$ , pak

$$\text{div } \nabla u = \text{div} \left[ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right]^\top = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \equiv \Delta u$$

Operátor, který k funkci  $u$  přiřazuje  $\Delta u$  se nazývá *Laplaceův operátor*.

**Věta 3.** (Věta o divergenci) Pro libovolnou regulární oblast  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  a vektorovou funkci  $\vec{u}(\mathbf{x})$  se složkami z  $H^1(\Omega)$  platí

$$\int_{\Omega} \text{div } \vec{u} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds. \quad (1)$$

**Poznámka.** Položíme-li v (1)  $\vec{n}(\mathbf{x}) = [n_1(\mathbf{x}), n_2(\mathbf{x})]^\top$  a postupně  $\vec{u}(\mathbf{x}) = [v(\mathbf{x})w(\mathbf{x}), 0]^\top$ ,  $\vec{u}(\mathbf{x}) = [0, v(\mathbf{x})w(\mathbf{x})]^\top$  pro funkce  $v, w \in H^1(\Omega)$ , obdržíme *Greenovy formule*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_1} w \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v w \cdot n_1 \, ds - \int_{\Omega} v \frac{\partial w}{\partial x_1} \, d\mathbf{x}, \quad (2)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_2} w \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v w \cdot n_2 \, ds - \int_{\Omega} v \frac{\partial w}{\partial x_2} \, d\mathbf{x}. \quad (3)$$

**Věta 4.** (Greenova věta) Jestliže  $\Omega$  je regulární oblast,  $v \in H^1(\Omega)$  a  $w \in H^2(\Omega)$ , pak

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} \, ds - \int_{\Omega} v \cdot \Delta w \, d\mathbf{x}. \quad (4)$$

Důkaz. Užitím Greenových formulí (2) a (3) získáme  $\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, d\mathbf{x} =$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial w}{\partial x_1} n_1 + v \frac{\partial w}{\partial x_2} n_2 \right) ds \\
 &- \int_{\Omega} \left( v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} ds - \int_{\Omega} v \Delta w \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

### Otázky a příklady k procvičení

1. Rozhodněte, zda množina

- a)  $\Omega = [(1, 2) \times (1, 2)] \cup [(2, 4) \times (2, 3)]$
- b)  $\Omega = \{\mathbf{x}; 0 < x_1 < \infty \text{ a } 0 < x_2 < 1/x_1\}$
- c)  $\Omega = \{\mathbf{x}; 0 < \|\mathbf{x}\|_{\infty} < 1\}$
- d)  $\Omega = \{\mathbf{x}; 0 < |x_1| < 1 \text{ a } -1 < x_2 < 1\}$

je otevřená, uzavřená, ohraničená, souvislá nebo regulární.

2. Ukažte, že Věta o divergenci je důsledkem Greenových formulí.

## 4 Rovnice vedení tepla

### 4.1 Odvození rovnice vedení tepla

Označíme  $u(\mathbf{x}, t)$  [K] teplotu v bodu  $\mathbf{x} \in \Omega$  a čase  $t$  [s] a uijeme Fourierova zákona pro intenzitu toku tepla  $w$  [ $J m^{-1} s^{-1}$ ] ve směru jednotkového vektoru  $\vec{n}$  [m] ve tvaru

$$w = -\lambda_0 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}.$$

Zde je  $\lambda_0$  [ $J s^{-1} K^{-1}$ ] koeficient tepelné vodivosti. Označme  $f_0(\mathbf{x}, t)$  [ $J m^{-2} s^{-1}$ ] intenzitu zdrojů tepla a  $\vec{v} = [v_1, v_2]^T$  [ $m s^{-1}$ ] vektor rychlosti toku látky v  $\Omega$ . Pro libovolnou regulární podoblast  $D$  v  $\Omega$  a časový interval  $(t, t + \delta t)$  [s] malé délky sformulujeme zákon zachování (tepelné) energie. Označíme

$$Q_1 \doteq \int_D f_0(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \cdot \delta t \quad [J]$$

množství tepla, vzniklé ve zdrojích v  $D$  za dobu  $\delta t$  [s],

$$Q_2 \doteq \int_D c \rho \frac{\partial u}{\partial t} d\mathbf{x} \cdot \delta t \quad [J]$$

množství tepla, spotřebované na zvýšení teploty látky o hustotě  $\rho$  [ $kg m^{-3}$ ] se specifickým teplem  $c$  [ $J kg^{-1} K^{-1}$ ] v oblasti  $D$  za dobu  $\delta t$ ,

$$Q_3 \doteq - \int_{\partial D} \lambda_0 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds \cdot \delta t \quad [J]$$

množství tepla, které proteče přes hranici  $\partial D$  za dobu  $\delta t$  ven z oblasti  $D$  (zde je  $\vec{n}$  jednotková vnější normála k hranici  $\partial D$ ) a

$$Q_4 \doteq \int_{\partial D} c \rho u \vec{v} \cdot \vec{n} ds \cdot \delta t \quad [J]$$

množství tepla, přenesené ven z  $D$  látkou o teplotě  $u$ , tekoucí rychlostí  $\vec{v}$  za dobu  $\delta t$ . Zákon zachování energie říká, že za dobu  $\delta t$  množství tepla  $Q_1$ , vzniklé v  $D$  ve zdrojích je stejné jako součet množství tepla  $Q_2$ , které je spotřebováno na změnu teploty v  $D$ , množství tepla  $Q_3$ , které přestoupí přes hranici  $\partial D$  ven z  $D$  a množství tepla  $Q_4$ , které je přeneseno ven z  $D$  v tekoucí látce. Tedy

$$Q_2 + Q_3 + Q_4 = Q_1,$$

tj.

$$\int_D c \rho \frac{\partial u}{\partial t} d\mathbf{x} - \int_{\partial D} \lambda_0 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds + \int_{\partial D} c \rho u \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_D f_0(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Užitím Věty o divergenci vznikne identita

$$\int_D \left( c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_0 \nabla u) + \operatorname{div}(c\rho u \vec{v}) \right) d\mathbf{x} = \int_D f_0(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (1)$$

Předpokládejme nyní, že

- a) veličiny  $c$  a  $\rho$  jsou na  $\Omega$  konstantní a
- b) integrandy na obou stranách identity jsou spojité.

Z předpokladu b) a skutečnosti, že identita (1) je splněna pro všechny regulární podoblasti  $D$  v  $\Omega$  plyne, že integrandy na obou stranách (1) jsou shodné v  $\Omega$  a předpoklad a) umožňuje oba integrandy v (1) vydělit konstantou  $c\rho$ . Vznikne diferenciální rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda \nabla u) + \operatorname{div}(u \vec{v}) = f(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

pro všechna  $\mathbf{x} \in \Omega$  a všechny časové okamžiky  $t$ . Zde  $\lambda = \lambda_0/(c\rho)$  a  $f = f_0/(c\rho)$ .

**Poznámka.** Je-li proudění nestlačitelné, tj.  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ , pak

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u \vec{v}) &= \frac{\partial(uv_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(uv_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1} v_1 + u \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} v_2 + u \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \\ &= \vec{v} \cdot \nabla u + u \operatorname{div} \vec{v} = \vec{v} \cdot \nabla u, \end{aligned}$$

takže rovnice (2) nabude tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda \nabla u) + \vec{v} \cdot \nabla u = f(\mathbf{x}, t). \quad (3)$$

## 4.2 Klasická formulace okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici

Nejprve se budeme zabývat procesem ustáleného, tj. *stacionárního vedení tepla* charakterizovaného podmínkami  $\partial u/\partial t = 0$ ,  $f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x})$  a dále budeme předpokládat, že  $\lambda = \operatorname{const} > 0$  a vektor toku  $\vec{v} = \vec{o}$ . Pak lze rovnici (3) vydělit konstantou  $\lambda$  a vznikne tato *Poissonova rovnice*

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4)$$

Pro jednoznačnost řešení je nutno na hranici  $\partial\Omega$  zadat okrajové podmínky. Zabývejme se nejprve kombinací *Dirichletovy a homogenní Neumannovy* okrajové podmínky

$$u = g_0 \quad \text{na } \Gamma_D \quad \text{a} \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{na } \Gamma_N \quad (5)$$

pro  $\bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N = \partial\Omega$ ,  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$  a  $\Gamma_D \neq \emptyset$ .

Řešením diferenciální rovnice (4) je funkce  $u = u(\mathbf{x})$ , pro niž je rovnice (4) splněna ve všech bodech z  $\Omega$ . Protože  $f \in C(\overline{\Omega})$ , musí být  $\Delta u$  spojitá funkce. Odtud a z faktu, že  $\Delta u$  obsahuje druhé parciální derivace plyne  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ . *Klasická formulace* problému (4), (5) je tedy úloha:

Pro dané funkce  $f \in C(\overline{\Omega})$  a  $g_0 \in C^2(\Gamma_D)$  najděte funkci  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  takovou, že jsou splněny rovnice (4) a okrajové podmínky (5).

### 4.3 Variační formulace okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici

Variační nebo též Galerkinovu či slabou formulaci úlohy (4), (5) odvodíme vynásobením obou stran rovnice (4) tzv. *testovací funkcí*  $v$  s vlastnostmi

$$v = 0 \text{ na } \Gamma_D \text{ a } v \in C^1(\overline{\Omega}) \quad (6)$$

a jejich integrací přes  $\Omega$ . Pomocí Greenovy formule pak obdržíme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} \Delta u v d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) v d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 \right) v ds + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v ds + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

neboť  $v = 0$  na  $\Gamma_D$  a  $\partial u / \partial \vec{n} = 0$  na  $\Gamma_N$ . Získali jsme identitu

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} \quad (7)$$

a tím jsme dokázali, že klasické řešení  $u$  úlohy (4),(5) splňuje i identitu (7) pro každou funkci  $v$  s vlastnostmi (6). Naopak lze ukázat, že funkce  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ , která splňuje (7) pro funkce  $v$  s vlastnostmi (6), vyhovuje i rovnici (4) a podmínce  $\partial u / \partial \vec{n}|_{\Gamma_N} = 0$ . Jestliže navíc  $u = g_0$  na  $\Gamma_D$ , pak je  $u$  řešením úlohy (4), (5).

Formulace (7) umožňuje podstatně zeslabit požadavky na řešení  $u$  i na funkce  $f, g_0$  z (4), (5). Z definice funkčních prostorů  $L_2(\Omega)$  a  $H^1(\Omega)$  plyne, že levá případně pravá strana identity (7) má dobře definovanou konečnou hodnotu, jestliže  $u, v \in H^1(\Omega)$  případně  $f, v \in L_2(\Omega)$ . *Množinu přípustných řešení* můžeme tedy definovat jako

$$W = \{w \in H^1(\Omega); w = g_0 \text{ na } \Gamma_D\}$$

a množinu *testovacích funkcí* jako

$$V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ na } \Gamma_D\}.$$

Podmínky  $w = g_0$  na  $\Gamma_D$  a  $v = 0$  na  $\Gamma_D$  jsou korektně formulovány v důsledku Věty o stopách za slabého předpokladu  $g_0 \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ . Pak je *variační (Galerkinovou, slabou) formulací* problému (4), (5) úloha:

$$\text{Najděte } u \in W \text{ tak, aby } B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V, \quad (8)$$

kde

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} \quad \text{a} \quad L(v) = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x}.$$

Všimněte si, že v této formulaci se Neumannova okrajová podmínka nevyskytuje. Okrajové podmínky s touto vlastností se nazývají *přirozené*. Naproti tomu Dirichletova podmínka je v definici množiny přípustných řešení  $W$  explicitně uvedena. Takovéto okrajové podmínky se nazývají *podstatné*.

Lze snadno ověřit, že pro libovolná reálná čísla  $a_1, a_2, b_1, b_2$  a funkce  $u_1, u_2, v, u, v_1, v_2 \in H^1(\Omega)$  platí

$$\begin{aligned} B(a_1 u_1 + a_2 u_2, v) &= a_1 B(u_1, v) + a_2 B(u_2, v), \\ B(u, b_1 v_1 + b_2 v_2) &= b_1 B(u, v_1) + b_2 B(u, v_2), \\ L(b_1 v_1 + b_2 v_2) &= b_1 L(v_1) + b_2 L(v_2). \end{aligned} \quad (9)$$

Proto říkáme, že funkcionál  $B$  je *bilineární forma* a  $L$  je *lineární forma*.

### Otázky a příklady k procvičení

1. Variační formulaci úlohy (4), (5) odvoďte dosazením vyjádření  $\Delta u$  z rovnice (4) do identity z Greenovy věty.
2. Ověřte bilinearitu a linearitu (9) funkcionálů  $B$  a  $L$ .

## 5 Diskretizace okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici metodou konečných prvků

V této kapitole se seznámíme s postupem výpočtu přibližného řešení variační úlohy (3.8) a tedy i přibližného řešení klasicky formulovaného problému.

### 5.1 Po částech lineární funkce

Předpokládejme, že regulární oblast  $\Omega$  je *polygonální*, tj. že hranice  $\partial\Omega$  je polygon a pokryjme uzávěr  $\bar{\Omega}$  triangulací:

**Definice.** Množina  $\mathcal{T}$  trojúhelníků (ty odpovídají konečným prvkům, elementům) se nazývá *triangulace* polygonální oblasti  $\Omega$ , když

- a)  $\bigcup_{e \in \mathcal{T}} e = \bar{\Omega}$  a
- b) libovolné dva různé trojúhelníky z  $\mathcal{T}$  jsou disjunktní nebo mají společný vrchol nebo mají společnou stranu.

Vrcholy trojúhelníků budeme nazývat *uzly* nebo *vrcholy triangulace* a budeme je značit symboly  $\mathbf{q}^{(1)}, \dots, \mathbf{q}^{(N)}$ .

Funkci, která je na každém elementu  $e \in \mathcal{T}$  lineární, tj. tvaru  $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma$  pro  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  a globálně, tj. na regulární oblasti  $\Omega$  je spojitá, budeme říkat *po částech lineární*. Charakterizaci funkcí lineárních na trojúhelnících triangulace, které leží v prostoru  $H^1(\Omega)$ , poskytuje toto tvrzení:

**Věta 1.** Uvažme polygonální regulární oblast  $\Omega$ , triangulaci  $\mathcal{T}$  oblasti  $\Omega$  a funkci  $v$ , lineární na každém trojúhelníku z  $\mathcal{T}$ . Pak

$$v \in H^1(\Omega) \text{ právě když } v \in C(\Omega).$$

Každá po částech lineární funkce  $v$  je jednoznačně určena svými hodnotami  $v_i$  ve vrcholech  $\mathbf{q}^{(i)}$  pro  $i = 1, \dots, N$ . Její graf je nad každým elementem  $e \in \mathcal{T}$  částí roviny. Prostor všech po částech lineárních funkcí budeme značit  $Z_h$ . Funkce ze  $Z_h$  mají na každém elementu  $e \in \mathcal{T}$  konstantní parciální derivace; říkáme, že tyto derivace jsou *po částech konstantní*; obecně nejsou spojitě na celé oblasti  $\Omega$ . Každému vrcholu triangulace  $\mathbf{q}^{(i)}$  je přiřazena funkce  $\varphi_i$  z  $Z_h$  předpisem

$$\varphi_i(\mathbf{q}^{(i)}) = 1 \text{ a } \varphi_i(\mathbf{q}^{(j)}) = 0 \text{ pro všechna } j \neq i.$$

Libovolnou funkci  $v \in Z_h$  lze tedy zapsat ve tvaru

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N v_i \varphi_i(\mathbf{x}), \text{ kde } v_i = v(\mathbf{q}^{(i)}). \quad (1)$$

Odtud plyne, že dimenze prostoru  $Z_h$  je  $N$  a funkce  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  tvoří jeho bazi. Všimněte si, že bázové funkce  $\varphi_i$  jsou rovny nule na všech elementech  $e$ , které nemají vrchol  $\mathbf{q}^{(i)}$ .

## 5.2 Metoda konečných prvků

Seznámíme se s MKP pro aproximaci řešení úlohy (3.8) za předpokladů, že  $g_0 = 0$  a že regulární oblast  $\Omega$  je polygonální. Pokryjme  $\bar{\Omega}$  triangulací  $\mathcal{T}$  takovou, že mezi jejími vrcholy jsou koncové body všech úseček tvořících polygon  $\partial\Omega$  a všechny koncové body části hranice  $\Gamma_D$ . Za účelem zjednodušení zápisů budeme vždy vrcholy číslovat tak, aby čísla  $1, \dots, M$  byla přiřazena vrcholům, které neleží na  $\bar{\Gamma}_D$  a  $M + 1, \dots, N$  vrcholům z  $\bar{\Gamma}_D$ .

Označme  $V_h$  prostor všech po částech lineárních funkcí, které jsou nulové na  $\Gamma_D$ . Díky značení (1) lze prostor  $V_h$  charakterizovat takto:

$$V_h = \left\{ v; v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M v_i \varphi_i(\mathbf{x}) \right\}. \quad (2)$$

Tato charakterizace a (1) ukazují, že  $V_h$  je podprostorem v  $Z_h$ . Řešení úlohy (3.8) budeme značit  $u$  a nazývat variační, slabé případně Galerkinovo řešení.

Přibližné řešení  $U$  úlohy (3.8) budeme tedy hledat jako funkci ze  $Z_h$ , splňující okrajovou podmínku  $U = 0$  na  $\Gamma_D$ . Pak  $U \in V_h$  a, označíme-li  $U_j = U(\mathbf{q}^{(j)})$ , je podle (2)

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M U_j \varphi_j(\mathbf{x}).$$

Funkci  $U$  nazveme *přibližným řešením* úlohy (3.8) metodou konečných prvků, když

$$B(U, v) = L(v) \quad \text{pro všechna } v \in V_h. \quad (3)$$

Nekonečná soustava rovnic (3) je ekvivalentní s rovnicemi

$$B(U, \varphi_i) = L(\varphi_i) \quad \text{pro } i = 1, \dots, M. \quad (4)$$

Skutečně, protože podmínka (4) je důsledkem (3), stačí ukázat, že z (4) plyne (3): Zvolme libovolnou funkci  $v \in V_h$ . Dle (2) je  $v = \sum_{i=1}^M v_i \varphi_i$  a tedy, vzhledem k bilinearitě formy  $B$ , (4) a linearitě formy  $L$  platí

$$B(U, v) = \sum_{i=1}^M v_i B(U, \varphi_i) = \sum_{i=1}^M v_i L(\varphi_i) = L(v).$$

**Poznámka 1.** V roce 1915 zveřejnil ruský inženýr Boris Galerkin článek, v němž prezentoval metodu řešení okrajových úloh pro parciální diferenciální rovnice (konkrétně deformační variantu úlohy pružnosti) metodou, využívající nové formulace, dnes známé jako Galerkinova případně slabá formulace. Až do vzniku MKP nebyl známý obecný postup, jak tuto formulaci diskretizovat. Diskretizace byly



navrhovány jen pro jednotlivé speciální případy a, jak se ukázalo později, matice výsledných systémů lineárních rovnic nebyly dobře podmíněné. MKP přinesla obecné konstrukce báзовých funkcí a algoritmicizaci tak, že výsledný algoritmus je snadno programovatelný na počítačích a matice výsledných systémů lineárních rovnic jsou řídké a dobře podmíněné i pro velké počty rovnic.

Nyní ukážeme, že funkce  $U$  je soustavami rovnic (3) nebo (4) jednoznačně určena. Najdeme maticový zápis rovnic (3) a z něj vyplyne, že k určení hodnot  $U_j$  je třeba řešit systém lineárních rovnic se symetrickou pozitivně definitní maticí.

Dosadíme-li do (3)

$$U = \sum_{j=1}^M U_j \varphi_j \quad \text{a} \quad v = \sum_{i=1}^M v_i \varphi_i,$$

dostaneme

$$\begin{aligned} B(U, v) &= B\left(\sum_{j=1}^M U_j \varphi_j, \sum_{i=1}^M v_i \varphi_i\right) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M U_j v_i B(\varphi_j, \varphi_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^M v_i U_j \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i d\mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^M v_i k_{ij} U_j \quad \text{pro} \\ k_{ij} &= B(\varphi_j, \varphi_i) = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\mathbf{x} = k_{ji}, \\ L(v) &= L\left(\sum_{i=1}^M v_i \varphi_i\right) = \sum_{i=1}^M v_i \int_{\Omega} f \varphi_i d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^M F_i v_i \quad \text{pro} \\ F_i &= L(\varphi_i) = \int_{\Omega} f \varphi_i d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Zavedme označení  $K = (k_{ij})_{i,j=1}^M$ ,  $\vec{U} = [U_1, \dots, U_M]^\top$ ,  $\vec{v} = [v_1, \dots, v_M]^\top$ ,  $\vec{F} = [F_1, \dots, F_M]^\top$ . Pak  $B(U, v) = \vec{v}^\top K \vec{U}$ ,  $L(v) = \vec{v}^\top \vec{F}$  a tedy systém rovnic (3) se dá maticově zapsat

$$\vec{v}^\top (K \vec{U} - \vec{F}) = 0 \quad \text{pro všechna } \vec{v} \in \mathbb{R}^M.$$

Tato podmínka je splněna tehdy a jen tehdy, když

$$K \vec{U} = \vec{F}. \tag{5}$$

$K$  se nazývá *matice tuhosti*. Ukázali jsme, že matice  $K$  je symetrická. Dále je řídká, neboť  $k_{ij} = 0$  pro všechny dvojice indexů, pro něž  $\mathbf{q}^{(i)}$  a  $\mathbf{q}^{(j)}$  nejsou vrcholy téhož trojúhelníka z  $\mathcal{T}$  a pásová. Dále je dobře podmíněná i pro velké počty neznámých. V

našem případě Laplaceova operátoru je matice  $K$  i symetrická pozitivně definitní, neboť

$$\vec{v}^\top K \vec{v} = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \|\nabla v\|_2^2 d\mathbf{x} > 0$$

pro všechna  $\vec{v} \neq \vec{0}$ .  $\vec{F}$  se nazývá *vektor zatížení*.

### 5.3 Algoritmizace

Vysvětlíme algoritmus sestavení systému rovnic (5).

1. *Triangulace oblasti  $\bar{\Omega}$* : Vrcholy triangulace očísľujeme  $\mathbf{q}^{(1)}, \dots, \mathbf{q}^{(N)}$  tak, že  $\mathbf{q}^{(M+1)}, \dots, \mathbf{q}^{(N)}$  jsou právě všechny vrcholy na hranici  $\bar{\Gamma}_D$  a trojúhelníkové elementy očísľujeme  $e_1, \dots, e_R$ . Triangulace je určena dvěma číselnými soubory: *Soubor vrcholů* je tvořen záznamy

$$i \text{ (číslo vrcholu)}, q_1^{(i)}, q_2^{(i)} \text{ (souřadnice vrcholu } \mathbf{q}^{(i)})$$

pro  $i = 1, \dots, N$  a *soubor trojúhelníků* je tvořen záznamy

$$i \text{ (číslo trojúhelníka)}, j, k, m \text{ (indexy vrcholů } e_i = \overline{\mathbf{q}^{(j)} \mathbf{q}^{(k)} \mathbf{q}^{(m)}})$$

pro  $i = 1, \dots, R$ .

2. *Výpočet prvků matice tuhosti*: Prvky matice  $K$  nikdy nepočítáme dosazením do vzorce

$$k_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i d\mathbf{x},$$

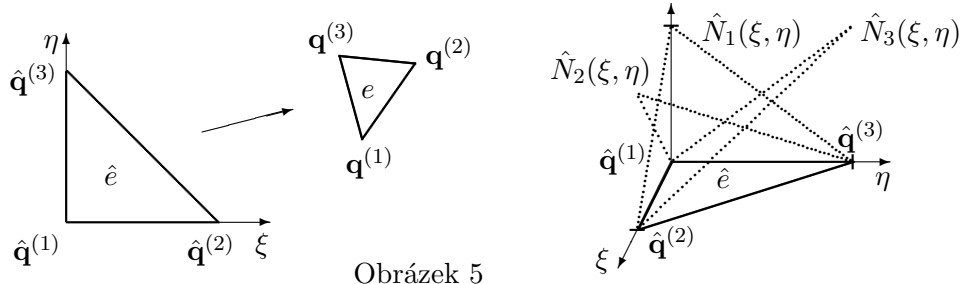
ale tzv. *kondenzací*, spočívající v tom, že integrál

$$\vec{v}^\top K \vec{U} = B(U, v) = \int_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla v d\mathbf{x} = \sum_{e \in \mathcal{T}} \int_e \nabla U \cdot \nabla v d\mathbf{x}$$

vypočítáme jako součet integrálů  $\int_e \nabla U \cdot \nabla v d\mathbf{x}$  přes všechny elementy  $e \in \mathcal{T}$ .

2.1. *Referenční element  $\hat{e}$* : Pro element  $e = \overline{\mathbf{q}^{(j)} \mathbf{q}^{(k)} \mathbf{q}^{(m)}}$  budeme příslušný integrál počítat transformací na tzv. *referenční element  $\hat{e}$*  s vrcholy  $\hat{\mathbf{q}}^{(1)} = (0, 0)$ ,  $\hat{\mathbf{q}}^{(2)} = (1, 0)$ ,  $\hat{\mathbf{q}}^{(3)} = (0, 1)$  v kartézské souřadné soustavě s osami  $\xi, \eta$ . Pro jednoduchost označme vrcholy elementu  $e$  lokálně  $\mathbf{q}^{(1)}$ ,  $\mathbf{q}^{(2)}$  a  $\mathbf{q}^{(3)}$ . Transformace

$$(\xi, \eta) \in \hat{e} \mapsto \mathbf{x}(\xi, \eta) : \begin{cases} x_1(\xi, \eta) = q_1^{(1)} + (q_1^{(2)} - q_1^{(1)})\xi + (q_1^{(3)} - q_1^{(1)})\eta \\ x_2(\xi, \eta) = q_2^{(1)} + (q_2^{(2)} - q_2^{(1)})\xi + (q_2^{(3)} - q_2^{(1)})\eta \end{cases} \quad (6)$$



Obrázek 5

zobrazuje referenční element  $\hat{e}$  vzájemně jednoznačně na element  $e$  tak, že  $\hat{\mathbf{q}}^{(i)}$  se zobrazuje na  $\mathbf{q}^{(i)}$  pro  $i = 1, 2, 3$ . Tuto transformaci lze zapsat i ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1(\xi, \eta) &= \sum_{r=1}^3 q_1^{(r)} \hat{N}_r(\xi, \eta) \\ x_2(\xi, \eta) &= \sum_{r=1}^3 q_2^{(r)} \hat{N}_r(\xi, \eta) \end{aligned}$$

pro  $\hat{N}_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$ ,  $\hat{N}_2(\xi, \eta) = \xi$ ,  $\hat{N}_3(\xi, \eta) = \eta$ . Všimněte si, že lineární funkce  $\hat{N}_r$  má ve vrcholu  $\hat{\mathbf{q}}^{(r)}$  hodnotu 1 a ve zbývajících vrcholech elementu  $\hat{e}$  má hodnotu 0 pro  $r = 1, 2, 3$ . Viz Obr. 5.

Transformací (6) přechází funkce  $v \in V_h$  pro  $\mathbf{x} \in e$  na funkci

$$\hat{v}(\xi, \eta) = v(\mathbf{x}(\xi, \eta)) \quad \text{pro } (\xi, \eta) \in \hat{e}.$$

Protože (6) je lineární transformace vzhledem ke  $\xi, \eta$  a  $v$  je lineární polynom v  $x_1, x_2$  na  $e$ , je  $\hat{v}(\xi, \eta)$  lineární polynom v  $\xi, \eta$ . Analogicky je transformace

$$\hat{U}(\xi, \eta) = U(\mathbf{x}(\xi, \eta))$$

lineárního polynomu  $U(\mathbf{x})$  na  $e$  lineárním polynomem v  $\xi, \eta$  na  $\hat{e}$ . Tedy

$$\hat{v}(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^3 v_r \hat{N}_r(\xi, \eta), \quad \hat{U}(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^3 U_r \hat{N}_r(\xi, \eta) \quad (7)$$

Veličiny  $U_1, U_2, U_3$  se nazývají *stupně volnosti* elementu.

2.2.1. *Výpočet integrálu  $\int_e \nabla U \cdot \nabla v d\mathbf{x}$  transformací na referenční element:* Budeme používat tohoto přesnějšího značení operátoru gradientu:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \hat{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial/\partial \xi \\ \partial/\partial \eta \end{bmatrix}.$$

Transformací (6) proměnných  $(x_1, x_2)$  na  $(\xi, \eta)$  vznikne

$$\int_e \nabla U \cdot \nabla v d\mathbf{x} = |\det J_e| \int_{\hat{e}} \hat{\nabla} U \cdot \hat{\nabla} v d\xi d\eta \quad \text{a} \quad J_e = \begin{bmatrix} q_1^{(2)} - q_1^{(1)} & q_1^{(3)} - q_1^{(1)} \\ q_2^{(2)} - q_2^{(1)} & q_2^{(3)} - q_2^{(1)} \end{bmatrix}$$

je *Jacobiova matice* transformace (6). Platí:

$$\hat{\nabla} \hat{v} = \begin{bmatrix} v_2 - v_1 \\ v_3 - v_1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \hat{\nabla} \hat{U} = \begin{bmatrix} U_2 - U_1 \\ U_3 - U_1 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\hat{\nabla} v = \left( J_e^\top \right)^{-1} \hat{\nabla} \hat{v} \quad \text{a} \quad \hat{\nabla} U = \left( J_e^\top \right)^{-1} \hat{\nabla} \hat{U}. \quad (9)$$

Tvrzení (8) vznikne výpočtem parciálních derivací vyjádření (7) a tvrzení (9) vznikne tímto užitím řetězového pravidla:

$$\hat{\nabla} \hat{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} v(\mathbf{x}(\xi, \eta)) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} v(\mathbf{x}(\xi, \eta)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_1} (q_1^{(2)} - q_1^{(1)}) + \frac{\partial v}{\partial x_2} (q_2^{(2)} - q_2^{(1)}) \\ \frac{\partial v}{\partial x_1} (q_1^{(3)} - q_1^{(1)}) + \frac{\partial v}{\partial x_2} (q_2^{(3)} - q_2^{(1)}) \end{bmatrix} = J_e^\top \hat{\nabla} v.$$

a tedy  $\hat{\nabla} v = (J_e^\top)^{-1} \hat{\nabla} \hat{v}$ .  $\hat{\nabla} U = (J_e^\top)^{-1} \hat{\nabla} \hat{U}$  lze ověřit záměnou  $U$  za  $v$  v předchozí úvaze. Pak

$$\begin{aligned} \int_e \nabla U \cdot \nabla v d\mathbf{x} &= \int_e \nabla v \cdot \nabla U d\mathbf{x} = |\det J_e| \int_{\hat{e}} (\hat{\nabla} v)^\top \hat{\nabla} \hat{U} d\xi d\eta \\ &= |\det J_e| \int_{\hat{e}} (\hat{\nabla} \hat{v})^\top J_e^{-1} (J_e^\top)^{-1} \hat{\nabla} \hat{U} d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{2} |\det J_e| [v_2 - v_1, v_3 - v_1] J_e^{-1} (J_e^\top)^{-1} \begin{bmatrix} U_2 - U_1 \\ U_3 - U_1 \end{bmatrix} \\ &= [v_1, v_2, v_3] K^e \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = (\vec{v}^e)^\top K^e \vec{U}^e \end{aligned}$$

pro symetrickou *lokální matici tuhosti*  $K^e$  elementu  $e$  s prvky

$$\begin{aligned} k_{11}^e &= a_2^e + a_3^e & k_{12}^e &= -a_3^e & k_{13}^e &= -a_2^e \\ & & k_{22}^e &= a_3^e + a_1^e & k_{23}^e &= -a_1^e \\ & & & & k_{33}^e &= a_1^e + a_2^e \end{aligned}$$

Zde

$$\begin{aligned} a_1^e &= \frac{1}{2|\det J_e|} \left[ (q_1^{(1)} - q_1^{(2)})(q_1^{(1)} - q_1^{(3)}) + (q_2^{(1)} - q_2^{(2)})(q_2^{(1)} - q_2^{(3)}) \right] \\ a_2^e &= \frac{1}{2|\det J_e|} \left[ (q_1^{(2)} - q_1^{(3)})(q_1^{(2)} - q_1^{(1)}) + (q_2^{(2)} - q_2^{(3)})(q_2^{(2)} - q_2^{(1)}) \right] \\ a_3^e &= \frac{1}{2|\det J_e|} \left[ (q_1^{(3)} - q_1^{(1)})(q_1^{(3)} - q_1^{(2)}) + (q_2^{(3)} - q_2^{(1)})(q_2^{(3)} - q_2^{(2)}) \right] \end{aligned}$$

$$\text{a } \det J_e = (q_1^{(2)} - q_1^{(1)})(q_2^{(3)} - q_2^{(1)}) - (q_1^{(3)} - q_1^{(1)})(q_2^{(2)} - q_2^{(1)}).$$

2.2.2. *Přímý výpočet integrálu*  $\int_e \nabla U \cdot \nabla v d\mathbf{x}$  pro  $e = \overline{\mathbf{q}^{(1)}\mathbf{q}^{(2)}\mathbf{q}^{(3)}}$ : Nejprve si všimněme, že plocha  $\text{pl}(e)$  elementu  $e$  je

$$\text{pl}(e) = \int_e d\mathbf{x} = |\det J_e| \int_{\hat{e}} d\xi d\eta = \frac{1}{2} |\det J_e|$$

a pro  $i = 1, 2, 3$  označme  $N_i(\mathbf{x})$  funkci, lineární na  $e$ , určenou předpisem

$$N_i(\mathbf{q}^{(i)}) = 1 \quad \text{a} \quad N_i(\mathbf{q}^{(j)}) = 0 = N_i(\mathbf{q}^{(k)}).$$

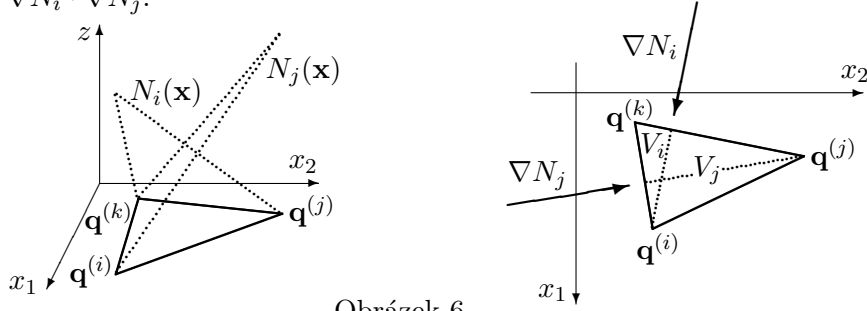
Pak je pro  $\mathbf{x} \in e$

$$U(\mathbf{x}) = (U_1 N_1 + U_2 N_2 + U_3 N_3)(\mathbf{x}), \quad v(\mathbf{x}) = (v_1 N_1 + v_2 N_2 + v_3 N_3)(\mathbf{x})$$

a tedy

$$\begin{aligned} \int_e \nabla U \cdot \nabla v d\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 v_i U_j \int_e \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} |\det J_e| [v_1, v_2, v_3] \begin{bmatrix} \nabla N_1 \cdot \nabla N_1 & \nabla N_1 \cdot \nabla N_2 & \nabla N_1 \cdot \nabla N_3 \\ \nabla N_2 \cdot \nabla N_1 & \nabla N_2 \cdot \nabla N_2 & \nabla N_2 \cdot \nabla N_3 \\ \nabla N_3 \cdot \nabla N_1 & \nabla N_3 \cdot \nabla N_2 & \nabla N_3 \cdot \nabla N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

*Výpočet*  $\nabla N_i \cdot \nabla N_j$ :



Obrázek 6

Užijeme-li značení z Obr. 6, pak

$$\text{pl}(e) = \frac{1}{2} |\det J_e| = \frac{1}{2} |\mathbf{q}^{(j)} \mathbf{q}^{(k)}| V_i \quad \text{a tedy} \quad |\nabla N_i| = \frac{1}{V_i} = \frac{|\mathbf{q}^{(j)} \mathbf{q}^{(k)}|}{|\det J_e|}.$$

Potom pro  $i = 1, 2, 3$  platí

$$\nabla N_i \cdot \nabla N_i = |\nabla N_i|^2 = \frac{1}{V_i^2} = \frac{|\mathbf{q}^{(j)} \mathbf{q}^{(k)}|^2}{(\det J_e)^2}$$

a pro libovolná  $i \neq j$  je  $\cos(\nabla N_i, \nabla N_j) = \cos(\overrightarrow{\mathbf{q}^{(j)} \mathbf{q}^{(k)}}, \overrightarrow{\mathbf{q}^{(k)} \mathbf{q}^{(i)}})$ , takže

$$\begin{aligned} \nabla N_i \cdot \nabla N_j &= |\nabla N_i| |\nabla N_j| \cos(\nabla N_i, \nabla N_j) \\ &= \frac{|\mathbf{q}^{(j)} \mathbf{q}^{(k)}|}{|\det J_e|} \cdot \frac{|\mathbf{q}^{(k)} \mathbf{q}^{(i)}|}{|\det J_e|} \cdot \cos(\overrightarrow{\mathbf{q}^{(j)} \mathbf{q}^{(k)}}, \overrightarrow{\mathbf{q}^{(k)} \mathbf{q}^{(i)}}) \\ &= \frac{1}{(\det J_e)^2} \overrightarrow{\mathbf{q}^{(j)} \mathbf{q}^{(k)}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{q}^{(k)} \mathbf{q}^{(i)}}. \end{aligned}$$

Odvození lokální matice tuhosti přímou metodou poskytuje názornou představu o hodnotách prvků lokální matice tuhosti  $K^e$ . Odvození transformací na referenční element je standardní metoda pro určení lokálních matic tuhosti pro všechny typy konečných prvků.

Vraťme se ke globálnímu značení veličin příslušných daným elementům:

$$\begin{aligned} B(U, v) &= \vec{v}^\top K \vec{U} = \sum_{i,n=1}^M v_i k_{in} U_n \\ &= \sum_{e \in \mathcal{T}} (\vec{v}^e)^\top K^e \vec{U}^e = \sum_{e \in \mathcal{T}} \sum_{r,s=j,k,m} v_r k_{rs}^e U_s \end{aligned} \quad (10)$$

Jestliže některý vrchol, například  $\mathbf{q}^{(j)}$ , leží na hranici  $\Gamma_D$ , pak  $v_j = 0 = U_j$ . Z formule (10) plyne, že globální matice tuhosti  $K$  typu  $(M, M)$  se sestaví z lokálních matic tuhosti takto: Nejprve na místa všech prvků matice  $K$  vložíme nuly. Pak postupně procházíme všechny elementy z  $\mathcal{T}$  a pro každý element  $e$  s vrcholy  $\mathbf{q}^{(j)}, \mathbf{q}^{(k)}, \mathbf{q}^{(m)}$  vypočteme prvky  $k_{rs}^e, r, s = j, k, m$  matice  $K^e$  a přičteme je k hodnotě prvku matice  $K$  s indexy  $(r, s)$ , pokud žádný z vrcholů  $\mathbf{q}^{(r)}, \mathbf{q}^{(s)}$  neleží na  $\Gamma_D$ , tj. pokud  $1 \leq r \leq M$  a  $1 \leq s \leq M$ . Po projití všech elementů z  $\mathcal{T}$  budou hodnoty všech prvků matice  $K$  korektní.

3. *Výpočet složek vektoru pravých stran:* Složky vektoru pravých stran  $\vec{F}$  se počítají současně s výpočtem prvků matice  $K$  kondenzací. Výchozí formuli odvodíme takto:

$$L(v) = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} = \sum_{e \in \mathcal{T}} \int_e f v \, d\mathbf{x}$$

Integrál  $\int_e f v \, d\mathbf{x}$  vypočteme přibližně pomocí jednoduché kvadraturní formule pro integraci přes trojúhelník  $e$

$$\int_e g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \doteq \frac{1}{3} \text{pl}(T)(g_1 + g_2 + g_3), \quad (11)$$

kde  $g_1, g_2, g_3$  jsou hodnoty funkce  $g(\mathbf{x})$  ve vrcholech  $e$ . Chyba této numerické integrace řádově nezhorší chybu MKP.

Užijeme-li formule (11) a položíme-li  $\text{pl}(e) = |\det J_e|/2$ , dostaneme

$$L_h(v) = \frac{1}{6} \sum_{e \in \mathcal{T}} |\det J_e| [v_j, v_k, v_m] \begin{bmatrix} f_j \\ f_k \\ f_m \end{bmatrix}, \quad \text{kde } f_r = f(\mathbf{q}^{(r)}) \text{ pro } r = j, k, m.$$

Zde  $L_h(v)$  je přibližná hodnota pravé strany  $L(v)$ , takže přibližné řešení  $U$  není řešením rovnic (3), ale rovnic  $B(U, v) = L_h(v)$  pro všechna  $v \in V_h$ . Příslušný vektor  $\vec{F}$  s vlastností  $\vec{v}^\top \vec{F} = L_h(v)$  sestavujeme takto: Nejprve vektor  $\vec{F}$  obsadíme nulami.

Zabýváme-li se v procesu kondenzace elementem  $e$  o vrcholech  $\mathbf{q}^{(r)}$  pro  $r = j, k, m$ , přičteme pro  $r = j, k, m$  ke složce  $F_r$  číslo  $|\det J_e|f_r/6$ , pokud  $r \in \{1, \dots, M\}$ .

**Poznámka 1.** a) Řešením systému rovnic (5) získáme po částech lineární aproximaci přesného řešení okrajové úlohy (3.4), (3.5) pro  $g_0 = 0$ , která je určena hodnotami  $U_1, \dots, U_M$  v uzlech  $\mathbf{q}^{(1)}, \dots, \mathbf{q}^{(M)}$ .

b) Gradient přibližného řešení má na každém elementu  $e = \overline{\mathbf{q}^{(j)}\mathbf{q}^{(k)}\mathbf{q}^{(m)}}$  konstantní hodnotu. Dosazením do druhého tvrzení z (9) vznikne

$$\nabla U = (\det J_e)^{-1} \left\{ (U_k - U_j) \begin{bmatrix} q_2^{(m)} - q_2^{(j)} \\ q_1^{(j)} - q_1^{(m)} \end{bmatrix} + (U_m - U_j) \begin{bmatrix} q_2^{(j)} - q_2^{(k)} \\ q_1^{(k)} - q_1^{(j)} \end{bmatrix} \right\}$$

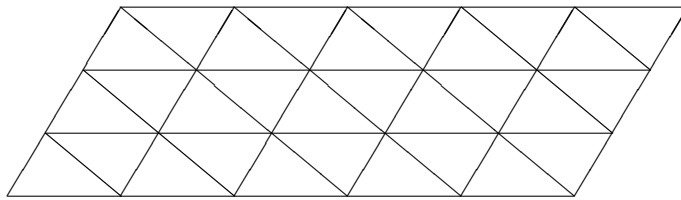
Velmi často je třeba počítat hodnoty gradientu přibližného řešení  $U$  v uzlech triangulace. Každý uzel  $\mathbf{q}$  je vrcholem několika elementů a na každém je aproximace gradientu obecně jiný konstantní vektor. Rutinně se nejčastěji počítá aproximace gradientu ve vrcholu  $\mathbf{q}$  jako aritmetický průměr konstantních aproximací gradientu přesného řešení na všech elementech s vrcholem  $\mathbf{q}$ .

c) Tam, kde jsou druhé parciální derivace hledaného řešení příliš velké, je aproximace po částech lineárními elementy velmi nepřesná, nezvolíme-li zde triangulaci dostatečně jemnou. V posledních letech jsou intenzivně vyvíjeny adaptivní algoritmy, které úlohy (3.4), (3.5) řeší v celé oblasti s chybou, menší, než předem dané malé kladné číslo  $\varepsilon$ . Po každém přibližném vyřešení úlohy (3.4), (3.5) jsou nalezeny podoblasti, na nichž je lokální chyba větší, než  $\varepsilon$ . V těchto podoblastech se triangulace zjemní a úloha se řeší znovu. Tento krok se opakuje tak dlouho, až je požadované přesnosti dosaženo na všech elementech triangulace.

d) Přesnost vypočtené aproximace závisí také na tom, zda elementy použité triangulace nemají žádné vnitřní úhly příliš malé.

### Otázky a příklady k procvičení

1. Je dán element  $e$  s vrcholy  $\mathbf{q}^{(1)} = (0; 0)$ ,  $\mathbf{q}^{(2)} = (0; 0,9)$ ,  $\mathbf{q}^{(3)} = (0,3; 0,5)$ .
  - a) Určete transformaci referenčního elementu  $\hat{e}$  na  $e$ , její Jacobiovu matici a plošný obsah elementu  $e$ .
  - b) Vypočtěte lokální matici tuhosti elementu  $e$  pro řešení okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici (3.4) transformací na referenční element i přímým výpočtem.
2. Na rovnoběžníkové oblasti  $\Omega$  uvažte triangulaci z Obr. 7. Za předpokladu, že Dirichletova podmínka je dána na její levé šikmé a horní vodorovné straně najděte číslování vrcholů, pro něž je šířka pásu příslušné matice tuhosti  $K$  a) nejmenší a b) největší. V obou případech matici  $K$  schematicky znázorněte a výskyty nenulových prvků v ní vyznačte.



Obrázek 7. Triangulace rovnoběžníkové oblasti



## 6 Minimizační formulace úlohy (3.4), (3.5)

Vedle Galerkinovy formulace (3.8) je populární i tzv. *minimizační* formulace úlohy (3.4), (3.5). Opět se omezíme na případ  $g_0 = 0$ : Hledáme funkci  $u$  splňující okrajovou podmínku  $u = 0$  na  $\Gamma_D$ , která dává minimum funkcionálu

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}B(v, v) - L(v) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \|\nabla v\|^2 - fv \right] dx$$

na prostoru  $V$ , tj.

$$u \in V : \quad \Phi(u) = \min_{v \in V} \Phi(v) \quad (1)$$

Ukážeme, že variační formulace (3.8) a minimizační formulace (1) mají stejné řešení (tedy řešení minimizačního problému splňuje i podmínku  $\partial u / \partial \vec{n} |_{\Gamma_N} = 0$ ). Předpokládejme nejdříve, že  $u$  je řešením problému (3.8) s  $g_0 = 0$ . Zvolme  $v \in V$  a položme  $w = v - u$ , takže  $w \in V$  a  $v = u + w$ . Platí

$$\begin{aligned} \Phi(v) &= \Phi(u + w) = \frac{1}{2}B(u + w, u + w) - L(u + w) \\ &= \frac{1}{2}B(u, u) - L(u) + B(u, w) - L(w) + \frac{1}{2}B(w, w) \\ &= \Phi(u) + \frac{1}{2}B(w, w) \geq \Phi(u), \end{aligned}$$

neboť  $B(u, w) = L(w)$  a  $B(w, w) \geq 0$ . Tedy  $u$  je řešením problému (1). Obráceně předpokládejme, že  $u$  je řešením problému (1). Potom pro každé  $v \in V$  a každé reálné číslo  $\varepsilon$  platí

$$\Phi(u) \leq \Phi(u + \varepsilon v)$$

a tedy diferencovatelná funkce

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &= \Phi(u + \varepsilon v) = \frac{1}{2}B(u, u) \\ &+ \varepsilon B(u, v) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 B(v, v) - L(u) - \varepsilon L(v) \end{aligned}$$

má minimum pro  $\varepsilon = 0$  a tudíž  $g'(0) = 0$ . Avšak  $g'(0) = B(u, v) - L(v)$  a vidíme, že  $u$  je řešením problému (3.8).

**Poznámka 2.** a) Minimizační formulace je méně obecná, než variační. Existuje jen pro okrajové problémy, v nichž odpovídající funkcionál  $B(u, v)$  je  $V$ -eliptický (je to jistý druh pozitivní definitnosti) a symetrický, tj. platí  $B(u, v) = B(v, u)$  pro všechna  $u, v \in V$ . Mnohé důležité diferenciální rovnice nevytváří symetrický funkcionál  $B(u, v)$ . Je-li však  $B(u, v)$   $V$ -eliptický, variační formulace existuje. Variační formulace existuje i pro nestacionární úlohy, pro něž minimizační formulace neexistuje.

b) Z minimizační formulace vychází přibližná metoda pro řešení okrajových úloh, tzv. *Ritzova metoda* (Walter Ritz, 1909). Je starší, než metoda Galerkinova a, jak bylo uvedeno, je méně obecná. V případě úlohy (3.4), (3.5) s  $g_0 = 0$  spočívá v tom, že se opět zvolí úplná posloupnost bázových funkcí  $\{\zeta_i\}_{i=1}^{\infty}$  splňujících homogenní Dirichletovu podmínku  $\zeta_i = 0$  na  $\Gamma_D$ , přibližné řešení se hledá ve tvaru  $u_n = \sum_{i=1}^n c_i \zeta_i$  a koeficienty  $c_i$  se určí z podmínky

$$\Phi(u_n) = \min_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \Phi \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \zeta_i \right).$$

Tento Ritzův přístup je možný i v MKP. Je-li  $v \in V_h$ , je v úloze (3.4), (3.5),  $g_0 = 0$

$$\Phi(v) = \frac{1}{2} \vec{v}^\top K \vec{v} - \vec{v}^\top \vec{F}$$

a úloha najít  $\min_{\vec{v} \in \mathbb{R}^M} \left[ \frac{1}{2} \vec{v}^\top K \vec{v} - \vec{v}^\top \vec{F} \right]$  znamená řešit rovnice  $K\vec{U} = \vec{F}$ .

Vzhledem k větší obecnosti se v dalším textu omezíme jen na Galerkinův přístup, stejně jako je tomu v drtivé většině monografií o MKP. V mechanice se variační (Galerkinův) přístup nazývá princip virtuálních posunutí či virtuálních prací, zatímco Ritzův přístup odpovídá principu minima potenciální energie.

## 7 Obecná stacionární eliptická úloha

Předmětem této kapitoly je aproximace řešení dalekosáhlého zobecnění modelové úlohy (3.8) metodou konečných prvků. Budeme se zabývat řešením okrajové úlohy sestávající z parciální diferenciální rovnice

$$-\operatorname{div}(\lambda \nabla u) + \omega u = f \quad (1)$$

na libovolné regulární oblasti  $\Omega$  a okrajových podmínkách

$$u = g_0 \text{ na } \Gamma_D \text{ a } \lambda \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \alpha u = g_1 \text{ na } \Gamma_N \quad (2)$$

za předpokladů, že  $\Gamma_D \neq \emptyset$ ,

$$\lambda(\mathbf{x}) \geq \lambda_{\min} > 0, \quad \omega(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ na } \bar{\Omega}, \quad \alpha(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ na } \Gamma_N. \quad (3)$$

*Klasická formulace* této okrajové úlohy je tedy úlohou najít funkci  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ , která splňuje rovnici (1) a okrajové podmínky a dále  $\lambda \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $f, \omega \in C(\bar{\Omega})$  splňují podmínky (3) a  $g_0 \in C^2(\Gamma_D)$ ,  $\alpha, g_1 \in C(\Gamma_N)$ .

*Odvození variační formulace:* Uvažme libovolnou *testovací funkci*  $v$ , tj.  $v|_{\Gamma_D} = 0$  a  $v \in C^1(\bar{\Omega})$ , a vynásobme obě strany rovnice (1) funkcí  $v$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \omega u \right] v d\mathbf{x} \\ &= \int_{\partial\Omega} \left( -\lambda \frac{\partial u}{\partial x} v n_1 - \lambda \frac{\partial u}{\partial y} v n_2 \right) ds \\ &\quad + \int_{\Omega} \left[ \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \omega u v \right] d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\partial\Omega} \lambda \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v ds + \int_{\Omega} (\lambda \nabla u \cdot \nabla v + \omega u v) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Gamma_N} (\alpha u - g_1) v ds + \int_{\Omega} (\lambda \nabla u \cdot \nabla v + \omega u v) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Tato identita je ekvivalentní s rovnicí

$$B(u, v) = L(v) \quad (4)$$

pro

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \int_{\Omega} (\lambda \nabla u \cdot \nabla v + \omega u v) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \alpha u v ds \\ L(v) &= \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} g_1 v ds \end{aligned}$$

Identita (4) má smysl pro všechny funkce  $u, v \in H^1(\Omega)$  a pro všechna  $\lambda, \omega \in L_2(\Omega)$ ,  $g_0 \in H^{1/2}(\Gamma_D)$  a  $\alpha, g_1 \in L_2(\Gamma_N)$ . Označíme

$$V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ na } \Gamma_D\} \quad \text{a}$$

$$W = \{w \in H^1(\Omega); w = g_0 \text{ na } \Gamma_D\}.$$

$V$  nazveme množina testovacích funkcí a  $W$  množina přípustných řešení. Pak variační formulace je tato úloha:

Najděte přípustné řešení  $u \in W$  takové, že

$$B(u, v) = L(v) \text{ pro všechna } v \in V. \quad (5)$$

## 7.1 Diskretizace variační formulace (5)

Protože  $\Omega$  je libovolná regulární oblast, nemusí být hranice  $\partial\Omega$  polygon. Proto, abychom mohli použít stejného procesu diskretizace jako v kapitole 4, nahradíme hranici  $\partial\Omega$  polygonem  $\partial\Omega_h$  tak, aby aproximace  $\partial\Omega_h$  hranice  $\partial\Omega$  byla sjednocením aproximace  $\Gamma_{D,h}$  hranice  $\Gamma_D$  a aproximace  $\Gamma_{N,h}$  hranice  $\Gamma_N$ . Oblast  $\Omega_h$ , určenou hranicí  $\partial\Omega_h$ , potom pokryjeme triangulací  $\mathcal{T}$  tak, aby všechny vrcholy trojúhelníků, ležící na hranici  $\partial\Omega_h$  ležely současně na hranici  $\partial\Omega$  a označíme  $g_{0,h}$  po částech lineární interpolant funkce  $g_0$  v uzlech z  $\Gamma_{D,h}$ .

Označíme  $Z_h$  prostor po částech lineárních funkcí na  $\Omega_h$  a položíme

$$V_h = \{v \in Z_h; v = 0 \text{ na } \Gamma_{D,h}\}$$

$$W_h = \{v \in Z_h; v = g_{0,h} \text{ na } \Gamma_{D,h}\}$$

V diskretizaci variační formulace budeme tedy hledat po částech lineární funkci  $U(\mathbf{x})$  ve tvaru  $U = \sum_{j=1}^N U_j \varphi_j(\mathbf{x})$ , přičemž zachováme význam počtů

$N$  počet všech vrcholů triangulace,

$M$  počet vrcholů triangulace, neležících na uzávěru  $\bar{\Gamma}_D$ ,

$R$  počet trojúhelníků triangulace

z kapitoly 4. Potom podmínka  $U \in W_h$  je ekvivalentní s podmínkou  $U \in Z_h$  a

$$U_j = g_0(\mathbf{q}^{(j)}) \text{ pro } j = M + 1, \dots, N \quad (6)$$

Nyní budeme diskretizovat funkcionály  $B(u, v)$  a  $L(v)$ . Volit

$$B_h(U, v) = \int_{\Omega_h} \lambda \nabla U \cdot \nabla v d\mathbf{x} + \int_{\Omega_h} \omega U v d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{N,h}} \alpha U v ds$$

$$L_h(v) = \int_{\Omega_h} f v d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{N,h}} g_1 v ds$$

nestačí. Integrandy obsahují proměnné koeficienty  $\lambda, \omega, \alpha$  a funkce  $f, g_1$ . Aby algoritmus byl skutečně obecný, chápeme všechny integrály přes  $\Omega_h$  jako součet integrálů přes všechny elementy a integrály přes elementy počítáme přibližně kvadraturní formulí (4.11). Integrály přes  $\Gamma_{N,h}$  počítáme jako součet integrálů přes všechny hrany  $\Gamma_{N,h}$  přibližně jednoduchou lichoběžníkovou formulí. Počítáme-li tedy  $\int_q G ds$

přes stranu  $q = \overline{\mathbf{q}^{(j)}\mathbf{q}^{(k)}}$ , dostaneme použitím transformace

$$x_1 = x_1(t) = q_1^{(j)} + (q_1^{(k)} - q_1^{(j)})t, \quad x_2 = x_2(t) = q_2^{(j)} + (q_2^{(k)} - q_2^{(j)})t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$\begin{aligned} \int_q G ds &= \int_0^1 G(x_1(t), x_2(t)) \sqrt{x_1'^2(t) + x_2'^2(t)} dt \doteq q_{jk}(G_j + G_k) \\ q_{jk} &= \frac{1}{2} \sqrt{(q_1^{(k)} - q_1^{(j)})^2 + (q_2^{(k)} - q_2^{(j)})^2} \end{aligned}$$

Výsledné funkcionály označíme  $B_h(U, v)$  a  $L_h(v)$ . Užijeme-li značení  $I^e(G) = \text{pl}(e)/3(G_j + G_k + G_m)$  a  $I^q(G) = q_{jk}(G_j + G_k)$ , vznikne

$$\begin{aligned} B_h(U, v) &= \sum_{e \in \mathcal{T}} I^e(\lambda \nabla U \cdot \nabla v + \omega U v) + \sum_{q \in \Gamma_{N,h}} I^q(\alpha U v) \\ L_h(v) &= \sum_{e \in \mathcal{T}} I^e(f v) + \sum_{q \in \Gamma_{N,h}} I^q(g_1 v) \end{aligned}$$

a přibližné řešení  $U$  je určeno podmínkou

$$B_h(U, v) = L_h(v) \quad \text{pro všechna } v \in V_h. \quad (7)$$

Abychom vyjádřili (7) v maticovém tvaru, upravme nejdříve  $I^e(\lambda \nabla U \cdot \nabla v)$ . Uvážíme-li, že  $\nabla U$  a  $\nabla v$  jsou na  $e$  konstantní, dostaneme  $I^e(\lambda \nabla U \cdot \nabla v)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \text{pl}(e) (\nabla U \cdot \nabla v) [\lambda_j + \lambda_k + \lambda_m] \\ &= \lambda^e \text{pl}(e) \nabla U \cdot \nabla v = \lambda^e \int_e \nabla U \cdot \nabla v d\mathbf{x} = \lambda^e (\vec{v}^e)^\top K^e \vec{U}^e, \end{aligned}$$

kde  $\lambda^e = (\lambda_j + \lambda_k + \lambda_m)/3$  a  $K^e$  je matice tuhosti elementu  $e$  uvedená v odstavci 4.3. Dále

$$\begin{aligned} I^e(\omega U v) &= \frac{|\det J_e|}{6} \sum_{r=j,k,m} \omega_r v_r U_r \\ &= \frac{|\det J_e|}{6} [v_j, v_k, v_m] \begin{bmatrix} \omega_j & 0 & 0 \\ 0 & \omega_k & 0 \\ 0 & 0 & \omega_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_j \\ U_k \\ U_m \end{bmatrix} \\ I^q(\alpha U v) &= q_{jk} \sum_{r=j,k} \alpha_r v_r U_r = q_{jk} [v_j, v_k] \begin{bmatrix} \alpha_j & 0 \\ 0 & \alpha_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_j \\ U_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Výsledná matice tuhosti  $K$  a vektor pravých stran  $\vec{F}$  odpovídající funkcionálu  $B_h(U, v)$  a pravé straně  $L_h(v)$  se sestavují takto: Matice  $K$  a vektor  $\vec{F}$  se obsadí nulami. Pak postupně procházíme všechny elementy z  $\mathcal{T}$  a hrany z  $\Gamma_{N,h}$ .

Uvažme element  $e$  s vrcholy  $\mathbf{q}^{(j)}, \mathbf{q}^{(k)}, \mathbf{q}^{(m)}$ . Pro libovolný index  $r \in \{j, k, m\}$  postupujeme takto:

1. Jestliže  $\mathbf{q}^{(r)} \in \bar{\Gamma}_{D,h}$ , neděláme nic.
2. Jestliže  $\mathbf{q}^{(r)} \notin \bar{\Gamma}_{D,h}$ , pak ke složce  $F_r$  vektoru  $\vec{F}$  přičteme  $|\det J_e|f_r/6$  a pro indexy  $s = j, k, m$  postupujeme takto:
  - 2.1. Jestliže  $\mathbf{q}^{(s)} \in \bar{\Gamma}_{D,h}$ , pak  $U_s = g_0(\mathbf{q}^{(s)})$  dle formulace (6) a tedy

$$\lambda^e k_{rs}^e v_r U_s = \lambda^e k_{rs}^e v_r g_0(\mathbf{q}^{(s)}).$$

Prvek  $\lambda^e k_{rs}^e g_0(\mathbf{q}^{(s)})$  nepatří do matice  $K$ , ale odečte se od složky  $F_r$  vektoru  $\vec{F}$ . (Tato situace nevznikala v problému (3.8), neboť tam  $g_0 = 0$  na  $\Gamma_D$ .)

- 2.2. Jestliže  $\mathbf{q}^{(s)} \notin \bar{\Gamma}_{D,h}$ , pak k prvku  $K_{rs}$  přičteme  $\lambda^e k_{rs}^e$  a v případě, že  $s = r$  přičteme ke  $K_{rr}$  ještě číslo  $|\det J_e|\omega_r/6$ .

Uvažme hranu  $q$  s vrcholy  $\mathbf{q}^{(j)}, \mathbf{q}^{(k)}$ : Jestliže  $\mathbf{q}^{(j)} \notin \bar{\Gamma}_{D,h}$ , pak číslo  $q_{jk}\alpha_j$  přičteme ke  $K_{jj}$  a podobně pro  $\mathbf{q}^{(k)} \notin \bar{\Gamma}_{D,h}$  přičteme  $q_{jk}\alpha_k$  ke  $K_{kk}$ . Jestliže  $q \subseteq \Gamma_{N,h}$ , pak číslo  $q_{jk}g_{1_j}$  přičteme k  $F_j$  když  $j \leq M$  a  $q_{jk}g_{1_k}$  přičteme k  $F_k$  když  $k \leq M$ .

Pro takto sestavenou matici  $K$  a vektor  $\vec{F}$  opět platí identita  $\vec{v}^\top K \vec{U} = \vec{v}^\top \vec{F}$  pro všechna  $\vec{v} \in \mathbb{R}^M$  právě tehdy, když  $K \vec{U} = \vec{F}$ . Matice  $K$  je opět symetrická a na základě předpokladu (3) se snadno vidí, že

$$\vec{v}^\top K \vec{v} \geq \lambda_{\min} \int_{\Omega_h} \|\nabla v\|^2 dx.$$

Tedy matice  $K$  je pozitivně definitní.

## 8 Nestacionární úloha vedení tepla

Nyní se budeme zabývat přibližným řešením nestacionárního (časově závislého) zobecnění úlohy (6.1) - (6.3). Předpokládáme tedy, že neznámá funkce  $u$  a daná funkce  $f$  závisí nejen na prostorových proměnných  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , ale i na času  $t$ . Budeme opět uvažovat okrajové podmínky (6.2) a materiálové podmínky (6.3). V tomto případě je však podmínky (6.2), (6.3) nutno doplnit o tzv. počáteční podmínku, určující hodnoty hledané funkce  $u$  na začátku procesu. Jestliže proces probíhá v časovém intervalu  $(0, T)$ , vznikne tato *nestacionární úloha vedení tepla*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda \nabla u) + \omega u = f \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \in \Omega, t \in (0, T) \quad (1)$$

s *okrajovými podmínkami*

$$u = g_0 \text{ na } \Gamma_D \quad \text{a} \quad \lambda \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u = g_1 \text{ na } \Gamma_N \quad \text{pro všechna } t \in (0, T) \quad (2)$$

a s *počáteční podmínkou*

$$u(\mathbf{x}, 0) = u^{(0)}(\mathbf{x}) \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (3)$$

Dále předpokládáme platnost *materiálových podmínek* (6.3).

*Variační formulace:* Pro každé  $t \in (0, T)$  vynásobíme obě strany (1) testovací funkcí  $v \in V$ , kde

$$V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ na } \Gamma_D\} \quad \text{a} \quad W = \{w \in H^1(\Omega); w = g_0 \text{ na } \Gamma_D\},$$

integrujeme přes  $\Omega$  a užijeme Greenovy formule. Označíme-li skalární součin

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad \text{pro } f, g \in L_2(\Omega),$$

vznikne úloha najít funkci  $u(\mathbf{x}, t)$  takovou, že v každém čase  $t \in (0, T)$

$$u = u(\mathbf{x}, t) \in W, \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \right\rangle + B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \quad (4)$$

$$\text{a } u(\mathbf{x}, 0) = u^{(0)}(\mathbf{x}) \text{ v } \bar{\Omega}.$$

Zde jsou  $B(u, v)$  a  $L(v)$  pro každé  $t \in (0, T)$  definována jako v (6.4).

*Diskretizace v prostoru:* Úlohu (4) budeme diskretizovat v prostorových souřadnicích stejně jako ve stacionárním případě. Nyní jsou však hodnoty přibližného řešení  $U \in W_h$  v uzlech  $\mathbf{q}^{(j)} \in \bar{\Omega}_h - \bar{\Gamma}_D$  závislé na času, tj.  $U_j = U_j(t)$  pro všechna

$t \in (0, T)$ . To nic nemění na tom, že funkcionály  $B(u, v)$  a  $L(v)$  budeme aproximovat výrazy  $B_h(U, v)$  a  $L_h(v)$ , uvedenými v (6.7). V (4) je však navíc člen  $\langle \partial u / \partial t, v \rangle$ . Ten budeme aproximovat výrazem

$$\int_{\Omega_h} \frac{\partial U}{\partial t} v d\mathbf{x} = \sum_{e \in \mathcal{T}} \int_e \frac{\partial U}{\partial t} v d\mathbf{x}.$$

Tyto integrály bychom mohli počítat přesně, ale i zde užijeme numerické integrace. Přitom se přesnost nezmenší a tzv. *matice hmotnosti* bude velmi jednoduchá, totiž diagonální. Protože

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{j=1}^M \dot{U}_j(t) \varphi_j(\mathbf{x}),$$

tečka nad  $U$  značí derivaci dle času  $t$ , dostaneme pro element  $e = \overline{\mathbf{q}^{(j)} \mathbf{q}^{(k)} \mathbf{q}^{(m)}}$

$$I^e \left( \frac{\partial U}{\partial t} v \right) = \frac{1}{6} |\det J_e| \sum_{r=j,k,m} v_r \dot{U}_r.$$

Konečným výsledkem tedy bude

$$\left\langle \frac{\partial U}{\partial t}, v \right\rangle_h = \sum_{e \in \mathcal{T}} I^e \left( \frac{\partial U}{\partial t} v \right) = \vec{v}^\top H \dot{U}, \quad \dot{U} = [\dot{U}_1, \dots, \dot{U}_M]^\top.$$

Diagonální matice hmotnosti  $H$  vznikne takto: Diagonálu  $[h_1, \dots, h_M]^\top$  matice  $H$  obsadíme nulami a pak procházíme všechny elementy. Příspěvek elementu  $e$  vznikne tak, že přičteme  $|\det J_e|/6$  k prvku  $h_r$  pro každý vrchol  $\mathbf{q}^{(r)}$  elementu  $e$ , který neleží na  $\Gamma_{D,h}$ . Je zřejmé, že výsledná matice  $H$  má v hlavní diagonále vesměs kladné prvky. Výsledkem tohoto procesu kondenzace je lineární soustava

$$H \dot{U} + K \vec{U} = \vec{F}(t) \tag{5}$$

$M$  ODR 1. řádu pro neznámé funkce  $U_1(t), \dots, U_M(t)$ . Počáteční podmínky získáme diskretizací podmínky  $u(\mathbf{x}, 0) = u^{(0)}(\mathbf{x})$  jednoduše tak, že položíme

$$\vec{U}(0) = \vec{U}^{(0)}, \tag{6}$$

kde  $U_j^{(0)} = u^{(0)}(\mathbf{q}^{(j)})$  pro  $j = 1, \dots, M$ .

Rovnice (5), (6) tvoří počáteční úlohu pro soustavu ODR 1. řádu, která splňuje Lipschitzovu podmínku a je tedy jednoznačně řešitelná. Tento problém lze řešit pouze numericky. Standardně se používají metody Eulerova, implicitní Eulerova a Crank-Nicolsonova. Interval  $(0, T)$  rozdělíme uzly  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_P = T$ , položíme  $\delta t_n = t_n - t_{n-1}$  pro  $n = 1, \dots, P$  a místo vektoru  $\vec{U}(t)$  funkcí  $U_1(t), \dots, U_M(t)$  hledáme soustavu vektorů  $\vec{U}^{(n)} \doteq \vec{U}(t_n) = [U_1(t_n), \dots, U_M(t_n)]^\top$  pro  $n = 0, \dots, P$ . Samozřejmě, že vektor  $\vec{U}^{(0)}$  je dán počáteční podmínkou (6) a



vektory  $\vec{U}^{(1)}, \dots, \vec{U}^{(P)}$  vypočítáme jednou z níže uvedených numerických metod a) - c):

a) Eulerova metoda:

$$H \left( \vec{U}^{(n)} - \vec{U}^{(n-1)} \right) / \delta t_n + K \vec{U}^{(n-1)} = \vec{F}^{(n-1)} \quad \text{pro } n = 1, \dots, P.$$

Uvědomíme-li si, že matice inverzní k diagonální matici  $H$  je  $H^{-1} = \text{diag}(h_1^{-1}, \dots, h_M^{-1})$ , pak tato explicitní metoda počítá vektor hodnot

$$\vec{U}^{(n)} = \vec{U}^{(n-1)} + \delta t_n H^{-1} K \vec{U}^{(n-1)} + \delta t_n H^{-1} \vec{F}^{(n-1)}.$$

b) Implicitní Eulerova metoda:

$$H \left( \vec{U}^{(n)} - \vec{U}^{(n-1)} \right) / \delta t_n + K \vec{U}^{(n)} = \vec{F}^{(n)} \quad \text{pro } n = 1, \dots, P,$$

takže výpočet vektoru přibližných hodnot  $\vec{U}^{(n)}$  spočívá v řešení systému lineárních rovnic

$$(H + \delta t_n K) \vec{U}^{(n)} = H \vec{U}^{(n-1)} + \delta t_n \vec{F}^{(n)}.$$

Matice soustavy  $H + \delta t_n K$  je symetrická pozitivně definitní.

c) Crank-Nicolsonovo schema:

$$H \left( \vec{U}^{(n)} - \vec{U}^{(n-1)} \right) / \delta t_n + \frac{1}{2} K \left( \vec{U}^{(n-1)} + \vec{U}^{(n)} \right) = \frac{1}{2} \left( \vec{F}^{(n-1)} + \vec{F}^{(n)} \right)$$

pro  $n = 1, \dots, P$ , takže výpočet vektoru přibližných hodnot  $\vec{U}^{(n)}$  spočívá v řešení systému lineárních rovnic

$$\left( H + \frac{\delta t_n}{2} K \right) \vec{U}^{(n)} = \left( H - \frac{\delta t_n}{2} K \right) \vec{U}^{(n-1)} + \frac{\delta t_n}{2} \left( \vec{F}^{(n-1)} + \vec{F}^{(n)} \right).$$

Zde je opět matice soustavy  $H + \delta t_n/2K$  symetrická pozitivně definitní. Víme, že Crank-Nicolsonova metoda je řádu 2, zatímco metody a) a b) jsou řádu 1, tj. podstatně méně přesné. Metoda a) má výhodu v tom, že při výpočtu vektoru  $\vec{U}^{(n)}$  se neřeší systém rovnic. Je však konvergentní jen za předpokladu, že  $\delta t_n \leq 2/\mu$ , kde  $\mu$  je maximální vlastní číslo matice  $H^{-1/2} K H^{-1/2}$ . Tato podmínka je zpravidla splněna jen pro velmi malé kroky  $\delta t_n$ . Navíc nalezení čísla  $\mu$  je velmi složité. Proto se Eulerova metoda v této situaci prakticky nepoužívá.

Používají se tedy metoda b) a podstatně přesnější metoda c). Velmi často jsou počáteční podmínky (v čase  $t = 0$ ) v rozporu s okrajovými podmínkami případně jsou v rozporu s tím, jak vypadá řešení dané PDR. Pak je derivace  $\partial u / \partial t$  velká a v takových situacích je výhodné používat malých časových kroků  $\delta t_n$  a implicitní Eulerovy metody, která je stabilnější, než Crank-Nicolsonovo schema. Tedy na začátku procesu se volí časové kroky malé a metoda b), postupně se časové kroky zvětšují a v jistém okamžiku se přejde na metodu c).

## 9 Nestacionární úloha konvekce-difúze

Seznámíme se s metodou pro aproximaci řešení nestacionární rovinné úlohy konvekce-difúze pro nestlačitelné proudění, využívající kombinace metody charakteristik s MKP. Jde o úlohu

$$\partial u / \partial t - \operatorname{div}(\lambda \nabla u) + \vec{v} \cdot \nabla u = f \quad \text{v } \Omega \times (0, T) \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma_D} = g_0, \quad (\lambda \partial u / \partial \vec{n} + \alpha u)|_{\Gamma_N} = g_1 \quad \text{pro } t \in (0, T) \quad (2)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}) \quad \text{v } \bar{\Omega} \quad (3)$$

Předpoklady:

- Oblast  $\Omega$  je regulární, části  $\Gamma_D, \Gamma_N$  hranice  $\partial\Omega$  se v čase nemění a v každém okamžiku  $t \in \langle 0, T \rangle$  leží všechny body hranice  $\partial\Omega$ , jimiž látka vtéká do  $\Omega$ , v  $\Gamma_D$ .
- Funkce  $f$  i složky  $v_1, v_2$  vektorové funkce  $\vec{v}$  leží v  $C(\bar{\Omega})$  a  $g_0 \in C(\bar{\Gamma}_D), \alpha, g_1 \in C(\bar{\Gamma}_N)$  pro všechna  $t \in \langle 0, T \rangle$  a  $\alpha = \alpha(\mathbf{x}) \geq 0$  a  $\lambda = \lambda(\mathbf{x}) \geq \lambda_{\min} > 0$ .

V této klasické formulaci jsou použity standardní *Eulerovy souřadnice* v tom smyslu, že prostorové souřadnice  $x_1, x_2$  a časová souřadnice  $t$  jsou vzájemně nezávislé. Formulaci úlohy zjednodušíme obratem, typickým pro *metodu charakteristik*, využívajícím *Lagrangeových souřadnic*: Prostorové souřadnice  $x_1(t), x_2(t)$  bodu  $\mathbf{x}(t)$  udávají polohu v čase  $t$  té částice látky proudící rychlostí  $\vec{v}$ , která se v daném čase  $t_0$  nachází v daném bodě  $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ . Tedy souřadnice  $x_1(t), x_2(t)$  jsou řešením počáteční úlohy

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= v_1(\mathbf{x}(t)), & x_1(t_0) &= x_1^{(0)} \\ x_2'(t) &= v_2(\mathbf{x}(t)), & x_2(t_0) &= x_2^{(0)} \end{aligned} \quad (4)$$

Tyto Lagrangeovy souřadnice je místo  $\mathbf{x}(t)$  přesněji označovat  $X(\mathbf{x}^{(0)}, t_0; t)$ . Užitím těchto souřadnic obdržíme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla u = \frac{\partial u(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} + \frac{\partial u(\mathbf{x}(t), t)}{\partial x_1} x_1'(t) + \frac{\partial u(\mathbf{x}(t), t)}{\partial x_2} x_2'(t) = \frac{du(\mathbf{x}(t), t)}{dt}$$

a tedy rovnice (1) nabude tvaru

$$\frac{du(\mathbf{x}(t), t)}{dt} - \operatorname{div}(\lambda \nabla u(\mathbf{x}(t), t)) = f(\mathbf{x}(t), t) \quad (5)$$

*Odvození variační formulace:* Pro  $v \in C^1(\bar{\Omega}), v|_{\Gamma_D} = 0$  plyne z (5) a (2) užitím Greenových formulí pro všechna  $t \in (0, T)$ :

$$\left\langle \frac{du}{dt}, v \right\rangle - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right] v d\mathbf{x} = \langle f, v \rangle$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{du}{dt}, v \right\rangle - \int_{\partial\Omega} \lambda \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} v ds + \int_{\Omega} \lambda \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} &= \langle f, v \rangle \\ \left\langle \frac{du}{dt}, v \right\rangle + \int_{\Gamma_N} (\alpha u - g_1) v ds + \int_{\Omega} \lambda \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} &= \langle f, v \rangle. \end{aligned}$$

Položíme-li  $V = \{v \in H^1(\Omega); v|_{\Gamma_D} = 0\}$  a

$$W = \{w(\mathbf{x}(t), t); w \in H^1(\Omega), w|_{\Gamma_D} = g_0 \forall t \in (0, T)\},$$

pak *variální formulace* zní: Najděte  $u \in W$  tak, aby  $u(\mathbf{x}, 0) = u^{(0)}(\mathbf{x})$  v  $\bar{\Omega}$  a

$$\left\langle \frac{du}{dt}, v \right\rangle + B(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \text{ a } \forall t \in (0, T). \quad (6)$$

Zde

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \int_{\Omega} \lambda \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \alpha uv ds \quad \text{a} \\ L(v) &= \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} g_1 v ds \end{aligned}$$

jsou funkcemi proměnné  $t \in (0, T)$ .

*Časová diskretizace:* Za účelem časové diskretizace zvolíme celé kladné číslo  $P$  a časový krok  $\delta t = T/P$ . Pak označíme  $t_i = i\delta t$  a  $G^{(i)}(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, t_i)$  pro každou funkci  $G = G(\mathbf{x}, t)$  a pro  $i = 0, \dots, P$ . Pro časovou diskretizaci uijeme *implicitní Eulerovy metody*: Protože funkce  $u^{(0)}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, 0)$  je dána počáteční podmínkou (3), funkci  $u^{(i+1)}(\mathbf{x})$  aproximujeme postupně pro  $i = 0, \dots, P-1$  přibližným řešením okrajové úlohy

$$\left\langle \frac{u^{(i+1)}(\mathbf{x}) - u^{(i)}(X^{(i)}(\mathbf{x}))}{\delta t}, v \right\rangle + B(u^{(i+1)}, v) = L(v)$$

pro  $t = t_{i+1}$  a pro  $X^{(i)}(\mathbf{x}) = X(\mathbf{x}, t_{i+1}; t_i)$ . Tato úloha je ekvivalentní s úlohou

$$\frac{1}{\delta t} \int_{\Omega} u^{(i+1)} v d\mathbf{x} + B(u^{(i+1)}, v) = L(v) + \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega} u^{(i)}(X^{(i)}(\mathbf{x})) v d\mathbf{x} \quad (7)$$

pro  $t = t_{i+1}$ .

*Prostorová diskretizace:* Stejně jako v odstavci 6.1 nahradíme hranici  $\partial\Omega$  regulární oblasti  $\Omega$  polygonem  $\partial\Omega_h$ , ohraničujícím polygonální oblast  $\Omega_h$ , kterou pokryjeme triangulací  $\mathcal{T}$  a postupně pro  $i = 0, \dots, P-1$  nahradíme úlohu (7) *diskrétní úlohou*: Položíme

$$\vec{U}^{(0)} = \left[ u^{(0)}(\mathbf{q}^{(1)}), \dots, u^{(0)}(\mathbf{q}^{(M)}) \right]^T$$

a postupně pro  $i = 0, \dots, P - 1$  určíme vektor  $\vec{U}^{(i+1)}$  řešením systému rovnic

$$K\vec{U}^{(i+1)} = \vec{F}^{(i+1)},$$

kde matice tuhosti  $K$  a vektor zatížení  $\vec{F}^{(i+1)}$  vzniknou procesem kondenzace z této *diskretizace* úlohy (7):

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \mathcal{T}} I^e \left( \frac{1}{\delta t} U^{(i+1)} v + \lambda \nabla U^{(i+1)} \cdot \nabla v \right) + \sum_{q \in \Gamma_{N,h}} I^q (\alpha U^{(i+1)} v) = \\ = \sum_{e \in \mathcal{T}} I^e \left( f^{(i+1)} v + \frac{1}{\delta t} U^{(i)}(X^{(i)}(\mathbf{x})) v \right) + \sum_{q \in \Gamma_{N,h}} I^q (g_1 v). \end{aligned}$$

**Poznámka.** Jestliže  $\mathbf{x} \in e = \overline{\mathbf{q}^{(j)} \mathbf{q}^{(k)} \mathbf{q}^{(m)}}$ , pak

$$I^e(U^{(i)}(X^{(i)}(\mathbf{x}))v) = \frac{\text{pl}(e)}{3} [v_j, v_k, v_m] \begin{bmatrix} U^{(i)}(X^{(i)}(\mathbf{q}^{(j)})) \\ U^{(i)}(X^{(i)}(\mathbf{q}^{(k)})) \\ U^{(i)}(X^{(i)}(\mathbf{q}^{(m)})) \end{bmatrix}$$

a pro  $r = j, k, m$ ,  $\mathbf{q}^{(r)} = (q_1^{(r)}, q_2^{(r)})$  je  $X^{(i)}(\mathbf{q}^{(r)}) = X(\mathbf{q}^{(r)}, t_{i+1}; t_i)$  bod  $(x_1(t_i), x_2(t_i))$  hodnot řešení  $x_1(t), x_2(t)$  počáteční úlohy

$$\begin{aligned} x_1'(t) = v_1(x_1(t), x_2(t)) & \quad \text{pro } t \in (t_i, t_{i+1}), & x_1(t_{i+1}) = q_1^{(r)} \\ x_2'(t) = v_2(x_1(t), x_2(t)) & & x_2(t_{i+1}) = q_2^{(r)}. \end{aligned} \quad (8)$$

## 10 Další typy konečných elementů

V kapitolách 4, 6, 7 a 8 jsme pracovali s *lineárními Lagrangeovými trojúhelníkovými elementy*  $\mathbf{e}$ ,

- přiřazenými danému *trojúhelníku*  $e = \overline{\mathbf{q}^{(1)}\mathbf{q}^{(2)}\mathbf{q}^{(3)}}$
- s *lokálním prostorem* zúžení lineárních polynomů  $p(\mathbf{x}) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$  na  $e$  a
- s parametry (*stupni volnosti*)  $p_1 = p(\mathbf{q}^{(1)})$ ,  $p_2 = p(\mathbf{q}^{(2)})$ ,  $p_3 = p(\mathbf{q}^{(3)})$ , které jednoznačně určují polynom  $p$  z lokálního prostoru.

Přirozeným "rozšířením" jsou *kvadratické Lagrangeovy trojúhelníkové elementy*  $\mathbf{e}$ , určené

- trojúhelníkem  $e = \overline{\mathbf{q}^{(1)}\mathbf{q}^{(2)}\mathbf{q}^{(3)}}$ ,
- *lokálním prostorem* zúžení kvadratických polynomů  $p(\mathbf{x}) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2$  na  $e$  a
- parametry (*stupně volnosti*)  $p_i = p(\mathbf{q}^{(i)})$  pro  $i = 1, \dots, 6$ , kde  $\mathbf{q}^{(4)}, \mathbf{q}^{(5)}, \mathbf{q}^{(6)}$  jsou postupně středy stran  $\overline{\mathbf{q}^{(1)}\mathbf{q}^{(2)}}$ ,  $\overline{\mathbf{q}^{(2)}\mathbf{q}^{(3)}}$  a  $\overline{\mathbf{q}^{(3)}\mathbf{q}^{(1)}}$ .

Ukážeme, že šesti hodnotami  $p_1, \dots, p_6$  v uzlech  $\mathbf{q}^{(1)}, \dots, \mathbf{q}^{(6)}$  je kvadratický polynom určen jednoznačně. Protože transformací (4.6):

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\xi, \eta) = q_1^{(1)} + \left( q_1^{(2)} - q_1^{(1)} \right) \xi + \left( q_1^{(3)} - q_1^{(1)} \right) \eta \\ x_2 &= x_2(\xi, \eta) = q_2^{(1)} + \left( q_2^{(2)} - q_2^{(1)} \right) \xi + \left( q_2^{(3)} - q_2^{(1)} \right) \eta \end{aligned}$$

přejde kvadratický polynom proměnných  $x_1, x_2$  na kvadratický polynom proměnných  $\xi, \eta$  a naopak, stačí toto tvrzení dokázat pro referenční element  $\hat{\mathbf{e}}$  v rovině  $\xi, \eta$ . Uzly  $\hat{\mathbf{q}}^{(1)} = (0, 0)$ ,  $\hat{\mathbf{q}}^{(2)} = (1, 0)$ ,  $\hat{\mathbf{q}}^{(3)} = (0, 1)$ ,  $\hat{\mathbf{q}}^{(4)} = (1/2, 0)$ ,  $\hat{\mathbf{q}}^{(5)} = (1/2, 0)$  a  $\hat{\mathbf{q}}^{(6)} = (0, 1/2)$  jednotkového trojúhelníka a polynomy

$$\begin{aligned} \hat{N}_1^{(2)} &= (1 - 2\xi - 2\eta)(1 - \xi - \eta) \\ \hat{N}_2^{(2)} &= (2\xi - 1)\xi \\ \hat{N}_3^{(2)} &= (2\eta - 1)\eta \\ \hat{N}_4^{(2)} &= 4(1 - \xi - \eta)\xi \\ \hat{N}_5^{(2)} &= 4\xi\eta \\ \hat{N}_6^{(2)} &= 4(1 - \xi - \eta)\eta \end{aligned}$$

mají tuto vlastnost:  $\hat{N}_j^{(2)}(\hat{\mathbf{q}}^{(j)}) = 1$  a  $\hat{N}_j^{(2)}(\hat{\mathbf{q}}^{(i)}) = 0$  pro všechna  $i \neq j$ ,  $j, i = 1, \dots, 6$ . Potom polynom

$$\hat{p}(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^6 p_j \hat{N}_j^{(2)}(\xi, \eta) \quad (9)$$

je evidentně kvadratický a  $\hat{p}(\hat{\mathbf{q}}^{(j)}) = p_j$  pro  $j = 1, \dots, 6$ .

Obráceně ukážeme, že každý kvadratický polynom  $\hat{q}(\xi, \eta)$  s vlastností  $\hat{q}(\hat{\mathbf{q}}^{(j)}) = p_j$  je roven polynomu  $\hat{p}$ : Polynom  $\hat{\omega} = \hat{p} - \hat{q}$  je kvadratický a je rovný nule v bodech  $\mathbf{q}^{(1)}, \dots, \mathbf{q}^{(6)}$ . Označme

$$\hat{\omega} = a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi^2 + a_4\xi\eta + a_5\eta^2.$$

Jelikož  $\hat{\omega}(\xi, 0) = a_0 + a_1\xi + a_3\xi^2 = 0$  pro  $\xi = 0, 1/2, 1$ , je nutně  $a_0 = a_1 = a_3 = 0$ . Podobně polynom  $\hat{\omega}(0, \eta) = a_2\eta + a_5\eta^2$  je roven nule pro  $\eta = 0, 1/2, 1$  a tedy  $a_2 = a_5 = 0$ . Konečně z identity  $\hat{\omega}(1/2, 1/2) = a_4/4 = 0$  plyne  $a_4 = 0$ . Tedy polynomy  $\hat{p}$  a  $\hat{q}$  jsou totožné.

Ověříme ještě, že pro dva elementy  $\mathbf{e}$  a  $\bar{\mathbf{e}}$  se společnou stranou  $q$  a pro libovolné kvadratické polynomy  $p$  a  $\bar{p}$ , určené hodnotami v uzlech elementu  $\mathbf{e}$  a  $\bar{\mathbf{e}}$  platí  $p = \bar{p}$  na  $q$ , takže funkce  $v(\mathbf{x})$ , definovaná na  $e \cup \bar{e}$  předpisem  $v = p$  na  $e$  a  $v = \bar{p}$  na  $\bar{e}$  je spojitá na  $e \cup \bar{e}$ : Rozdíl  $p - \bar{p}$  je na straně  $q$  kvadratický polynom jedné proměnné, který je roven nule ve třech bodech. Potom však  $p - \bar{p} = 0$  a tedy  $p = \bar{p}$  na  $q$ .

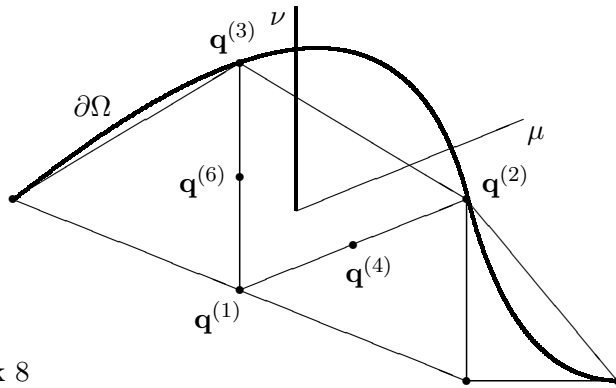
Předpokládejme, že hranice  $\partial\Omega$  regulární oblasti  $\Omega$  je polygon a zvolme na  $\Omega$  triangulaci  $\mathcal{T}$ . Každý element bude nyní mít 6 uzlů. Jako v odstavci 4.1 označíme  $Z_h$  prostor *po částech kvadratických funkcí*, tj. prostor funkcí, spojitých na  $\Omega$ , které jsou kvadratickými polynomy na každém trojúhelníku z  $\mathcal{T}$ . Dále označíme  $V_h = \{v \in Z_h; v = 0 \text{ na } \bar{\Gamma}_D\}$  prostor testovacích funkcí a  $W_h = \{w \in Z_h; w = g_{0,h} \text{ na } \bar{\Gamma}_D\}$ , má-li Dirichletova podmínka tvar  $u = g_0$  na  $\bar{\Gamma}_D$ . První parciální derivace funkcí z prostoru  $Z_h$  jsou spojitě na každém elementu (jsou to lineární polynomy), ale nejsou spojitě globálně.

Při použití kvadratických elementů pro řešení úlohy (6.1) - (6.3) postupujeme stejně jako při popsaném použití lineárních elementů. Jediný rozdíl je v tom, že místo numerické integrační formule (4.11) musíme pro integraci přes trojúhelníky použít přesnější formule

$$\int_T g d\mathbf{x} \doteq \frac{1}{3} \text{pl}(T) [g_4 + g_5 + g_6], \quad (10)$$

kde  $g_4, g_5, g_6$  jsou hodnoty integrandu  $g(\mathbf{x})$  ve středech stran trojúhelníka  $T$ .

K výpočtu křivkových integrálů přes strany hranice  $\partial\Omega_h$  uijeme jednoduchého Simpsonova pravidla. Matice tuhosti  $K$  je opět řídká a pozitivně definitní. Při řešení nestacionární úlohy (7.1) - (7.3) není matice hmotnosti  $M$  diagonální, ale je řídká a pozitivně definitní. Použití kvadratických elementů vede na řádově přesnější aproximaci řešení, je-li oblast  $\Omega$  polygonální.



Obrázek 8

Pro obecnou regulární oblast  $\Omega$  znehodnocuje chyba aproximace hranice  $\partial\Omega$  polygonem  $\partial\Omega_h$  vysoký řád chyby aproximace po částech kvadratickou funkcí. Viz Obr. 8. Řešením je aproximace oblouku hranice  $\partial\Omega$  mezi body  $\mathbf{q}^{(2)}$  a  $\mathbf{q}^{(3)}$  z Obr. 8 stranou "křivočarého trojúhelníka", který je obrazem strany  $\hat{\mathbf{q}}^{(2)}\hat{\mathbf{q}}^{(3)}$  při transformaci

$$x_1 = x_1(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^6 q_1^{(j)} \hat{N}_j^{(2)}, \quad x_2 = x_2(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^6 q_2^{(j)} \hat{N}_j^{(2)}, \quad (11)$$

kde  $\mathbf{q}^{(4)}$ ,  $\mathbf{q}^{(6)}$  jsou středy úseček  $\overline{\hat{\mathbf{q}}^{(1)}\hat{\mathbf{q}}^{(2)}}$ ,  $\overline{\hat{\mathbf{q}}^{(3)}\hat{\mathbf{q}}^{(1)}}$  a  $\mathbf{q}^{(5)}$  volíme tak, aby oblouk

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\xi, 1 - \xi) = q_1^{(2)} \hat{N}_2^{(2)}(\xi, 1 - \xi) + q_1^{(5)} \hat{N}_5^{(2)}(\xi, 1 - \xi) + q_1^{(3)} \hat{N}_3^{(2)}(\xi, 1 - \xi) \\ x_2 &= x_2(\xi, 1 - \xi) = q_2^{(2)} \hat{N}_2^{(2)}(\xi, 1 - \xi) + q_2^{(5)} \hat{N}_5^{(2)}(\xi, 1 - \xi) + q_2^{(3)} \hat{N}_3^{(2)}(\xi, 1 - \xi) \end{aligned}$$

$0 \leq \xi \leq 1$ , procházející body  $\mathbf{q}^{(2)}$ ,  $\mathbf{q}^{(5)}$ ,  $\mathbf{q}^{(3)}$  byl dobrou aproximací oblouku  $\partial\Omega$  mezi  $\mathbf{q}^{(2)}$  a  $\mathbf{q}^{(3)}$ . Nutnou podmínkou pro použitelnost tohoto "izoparametrického kvadratického elementu" je, aby Jacobián uvedené transformace byl různý od nuly. Ta je splněna vždy, když vrchol  $\mathbf{q}^{(5)}$  leží mezi polopřímkami  $\mu$  a  $\nu$  z Obr. 8. Při vhodné volbě polohy bodu  $\mathbf{q}^{(5)}$  na, případně blízko hranice  $\partial\Omega$  umožňuje tato technika dosáhnout řádově stejně přesné aproximace řešení jako užití kvadratických elementů na polygonální oblasti.

Testovací funkce jsou na izoparametrickém elementu definovány stejně, jako na elementu trojúhelníkovém:

$$v(\mathbf{x}) = \hat{v}(\xi(\mathbf{x}), \eta(\mathbf{x})), \quad \hat{v}(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^6 v_j N_j^{(2)}(\xi, \eta) \quad (12)$$

Tento typ konečného prvku se nazývá *Lagrangeův kvadratický isoparametrický element*. Poznamenejme, že zde jsou tvarové funkce jisté obecně iracionální funkce, jejichž explicitní popis není znám. Nejsme totiž schopni vyjádřit funkce  $\xi(\mathbf{x})$  a  $\eta(\mathbf{x})$  formulí. To však není třeba, protože všechny výpočty se provádí na referenčním elementu  $\hat{\mathbf{e}}$ . Pro výpočty integrálů se užívá formule (10) a pro křivkové integrály jednoduchá Simpsonova formule.

V dimenzi 2 je užití lineárních a křivých isoparametrických elementů postačující. Existují i čtyřúhelníkové isoparametrické elementy, které jsou stejně dobře použitelné v dimenzi 2 a navíc mají velmi užitečné rozšíření do dimenze 3, na rozdíl od elementů trojúhelníkových.

Seznámíme se stručně se dvěma typy čtyřúhelníkových elementů.

Uvažujme čtyřúhelník s vrcholy  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_4$ . Je-li tento čtyřúhelník konvexní, pak je transformací tvaru

$$x = x(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^4 x_j N_j(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^4 y_j N_j(\xi, \eta), \quad (13)$$

kde

$$\begin{aligned} N_1 &= (1 - \xi)(1 - \eta)/4 & N_2 &= (1 + \xi)(1 - \eta)/4 \\ N_3 &= (1 + \xi)(1 + \eta)/4 & N_4 &= (1 - \xi)(1 + \eta)/4 \end{aligned}$$

navzájem jednoznačně zobrazen na referenční element  $\hat{e}$ , což je čtverec v rovině  $\xi, \eta$  s vrcholy  $R_1 = [-1, -1]$ ,  $R_2 = [1, -1]$ ,  $R_3 = [1, 1]$ ,  $R_4 = [-1, 1]$ . Jakobián tohoto zobrazení je nenulový. Všimněte si, že funkce  $N_j$  jsou bilineární polynomy. Testovací funkce jsou definovány analogicky jako v (27) nebo (51)

$$v(\mathbf{x}) = \hat{v}(\xi(\mathbf{x}), \eta(\mathbf{x})), \quad \hat{v}(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^4 v_j N_j(\xi, \eta). \quad (14)$$

Aby aproximace byla invertibilní, musí být čtyřúhelník  $\overline{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_3 \mathbf{q}_4}$  konvexní a jeho vnitřní úhly by neměly být blízké 0 nebo  $\pi$ . Všechny integrály na  $\hat{e}$  počítáme Gaussovou  $2 \times 2$  bodovou kvadraturní formulí

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{G}(\xi, \eta) d\xi d\eta \doteq \hat{G}(-\alpha, -\alpha) + \hat{G}(\alpha, -\alpha) + \hat{G}(\alpha, \alpha) + \hat{G}(-\alpha, \alpha) \quad (15)$$

pro  $\alpha = \sqrt{3}/3$ . Křivkové integrály počítáme lichoběžníkovou formulí.

Uvažme nyní v rovině  $x, y$  osm bodů  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_4, \mathbf{q}_5, \dots, \mathbf{q}_8$  takových, že  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_4$  tvoří čtyřúhelník a body  $\mathbf{q}_5, \dots, \mathbf{q}_8$  leží poblíž středů stran tohoto čtyřúhelníka. Místo transformace (56) uvažme

$$x = x(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^8 x_j N_j^{(2)}, \quad y = y(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^8 y_j N_j^{(2)}, \quad (16)$$

kde

$$\begin{aligned} \hat{N}_1^{(2)} &= (1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1)/4 \\ \hat{N}_2^{(2)} &= (1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1)/4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\hat{N}_3^{(2)} &= (1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1)/4 \\
N_4^{(2)} &= (1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1)/4 \\
N_5^{(2)} &= (1 - \xi^2)(1 - \eta)/2 \\
N_6^{(2)} &= (1 + \xi)(1 - \eta^2)/2 \\
N_7^{(2)} &= (1 - \xi^2)(1 + \eta)/2 \\
N_8^{(2)} &= (1 - \xi)(1 - \eta^2)
\end{aligned} \tag{17}$$

Křivé čtyřúhelníkové elementy sestrojíme analogicky jako v případě křivých trojúhelníkových elementů. Všechny integrály na  $\hat{e}$  se počítají kvadraturní Gaussovou  $3 \times 3$  bodovou formulí a křivkové integrály se počítají jednoduchou Simpsonovou formulí.

## 11 Alternativní přístupy

Dosud jsme se v našich úvahách zabývali téměř výhradně numerickým řešením okrajových a počátečních úloh pro parciální diferenciální rovnice Galerkinovou metodou se speciální volbou testovacích funkcí, široké veřejnosti známou jako metoda konečných prvků (anglicky *Finite Element Method*). Tato metoda se od prvních teoretických prací, z nichž nejslavnější je [17], i od aplikačních výsledků, jež dokumentuje [10], v obou případech spjatých s výzkumem na VUT v Brně, rozšířila celosvětově, potlačivši dosud používané výpočtové přístupy založené na numerickém derivování diferenciálních formulací týchž úloh, známé jako metoda sítí či metoda konečných diferencí (anglicky *Finite Difference Method*), takže dnes je základním výpočtovým nástrojem komerčních programových systémů, jakými jsou např. ANSYS (pro řešení rozsáhlé třídy úloh mechaniky kontinua), ABAQUS (akcentující strukturu materiálu a mechaniku porušení), ATHENA (specializový na betonové a spřažené konstrukce) či COMSOL (vzniklý v prostředí MATLABu a vhodný pro vývoj původního specializovaného softwaru). Na závěr se nicméně pokusíme na jednoduché modelové úloze shrnout dosavadní přístupy a poukázat i na některé jejich alternativy, vesměs s pomocí odkazů na doporučenou literaturu, z níž část vyžaduje hlubší studium matematických základů příslušných algoritmů, než může nabídnout tento studijní text. Vedle pokroku v matematice, fyzice i technických vědách včetně stavebního inženýrství nicméně přispívá k jeho rychlému zastarávání a k nutnosti budoucích revizí i vývoj v oblasti počítačového hardwaru i softwaru, mj. rozšiřující se možnosti rozsáhlých paralelizovatelných výpočtů.

### 11.1 Modelová úloha

V souladu s označením předcházejících kapitol hledejme v libovolném čase  $t$  řešení modelové (obecně nestacionární) úlohy

$$\partial u / \partial t - \nabla \cdot \mathbf{g} = f \quad \text{na } \Omega, \quad (1)$$

která z fyzikálního pohledu reprezentuje zákon zachování jisté skalární veličiny  $u$  na oblasti  $\Omega$  v trojrozměrném euklidovském prostoru  $\mathbb{R}^3$  pro příslušný tok  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$ , závislý na skalární veličině  $u$  podle lineárního konstitutivního vztahu

$$\mathbf{g} = a \nabla u \quad \text{na } \Omega, \quad (2)$$

kde  $a(\mathbf{x})$  je kladná omezená materiálová charakteristika na  $\Omega$  a  $f$  reprezentuje objemový zdroj pro veličinu  $u$  na  $\Omega$ ; obecně  $f$  i  $u$  jsou skalárními funkcemi prostorových kartézských souřadnic  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  i času  $t$ . Všimněme si, že zatímco Hamiltonův operátor  $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$  v (1) označuje gradient skalárního pole, operátor  $\nabla \cdot$  (se znaménkem skalárního součinu v  $\mathbb{R}^3$ ) v (2) označuje divergenci vektorového pole; speciálně tak můžeme zapsat mj. známý Laplacův operátor  $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$  stručně jako  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ .

Z rovnic typu (1) vycházejí základní principy klasické termomechaniky, podrobně prezentované v [5], str. 9. V Boltzmannově pojetí je pro skalární veličiny, jimiž jsou:

- i) hustota materiálu (v pevném, kapalném či plynném skupenství) pro tzv. princip zachování hmotnosti,
- ii) 3 složky rychlosti pohybu, zpravidla vztažené k výchozí geometrické konfiguraci, pro tzv. princip zachování hybnosti a
- iii) celková energie (či speciálně entalpie) pro tzv. princip zachování energie,

třeba doplnit převážně empirické (experimentálně popsané) konstitutivní vztahy typu (2) pro  $\mathbf{g}$ , případně i podstatně složitější, a vymezit rovněž zdroje  $f$ . V případě kontinua Cosseratových, kde se v každém bodě mimo 3 složek posunutí (a následně jejich rychlostí) uvažují i 3 nezávislé složky pootočení, se v ii) rozlišuje navíc tzv. lineární a úhlová hybnost.

Obecně vede kompletní formulace i), ii), iii) k dosti rozsáhlým soustavám parciálních diferenciálních rovnic, jimiž se zde nebudeme zabývat. Poměrně jednoduchý příklad proudění vzduchu v místnosti vyvolaného tepelnými toky je podrobně analyzován v [7]. Sestává-li materiál z více složek, případně může docházet ke změnám jeho skupenství či jiným fázovým transformacím (jmenovitě v raných stadiích formování struktury betonu, případně při zpracování kovových materiálů za vysokých teplot) počet rovnic i (mnohdy problematicky kalibrovatelných) konstitutivních vztahů narůstá – např. v [16] je jich zapotřebí 20.

Při studiu nestacionární úlohy konvekce - difúze jsme se seznámili v souvislosti s metodou charakteristik s Eulerovými a Lagrangovými souřadnicemi. Oba zmíněné přístupy jsou použitelné i ve formulaci i), ii), iii); některé moderní výpočtové algoritmy navíc využívají i jejich vhodné kombinace, označované anglicky jako *Arbitrary Lagrangian - Eulerian* (český ekvivalent není dosud běžný); podrobnosti lze najít v [2].

Modelová úloha (1) a (2) může pocházet z různě fyzikálně formulovaných úloh: může např. jít o vedení tepla (bez jiných fyzikálních vlivů), přičemž 2 vyjadřuje tzv. Fourierův zákon, případně o šíření vlhkosti či jiné kontaminující látky pórovitým prostředím, přičemž 2 vyjadřuje tzv. Fickův zákon. Z (1) a (2) lze nicméně snadno vyloučit  $\mathbf{g}$  s výsledkem

$$\partial u / \partial t - \nabla \cdot (a \nabla u) = f \quad \text{na } \Omega. \quad (3)$$

Pro vhodnou testovací funkci  $v$  definovanou na  $\Omega$  pak můžeme tento výsledek formálně přepsat do integrálního tvaru

$$\langle v, \partial u / \partial t \rangle - \langle v, \nabla \cdot (a \nabla u) \rangle = \langle v, f \rangle, \quad (4)$$

následně po integraci per partes do tvaru

$$\langle v, \partial u / \partial t \rangle + \langle \nabla v, a \nabla u \rangle = \langle v, f \rangle + \langle v, (a \nabla u) \cdot \mathbf{n} \rangle_*, \quad (5)$$

případně ještě po druhé integraci per partes do tvaru

$$\langle v, \partial u / \partial t \rangle - \langle \nabla \cdot (a \nabla v), u \rangle = \langle v, f \rangle + \langle v, (a \nabla u) \cdot \mathbf{n} \rangle_* - \langle (a \nabla v) \cdot \mathbf{n}, u \rangle_*, \quad (6)$$

kde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  označuje (v návaznosti na předchozí úvahy) objemový integrál ze součinu příslušných 2 skalárních funkcí přes  $\Omega$ , stejně jako objemový integrál ze skalárního součinu příslušných 2 vektorových funkcí přes  $\Omega$ , zatímco  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$  má význam plošného integrálu ze součinu příslušných 2 skalárních funkcí přes hranici  $\partial\Omega$  oblasti  $\Omega$  v  $\mathbb{R}^3$ ; pro jeho vyčíslení potřebujeme znát jednotkový vektor vnější normály  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ , jehož všechny složky jsou funkcí  $\mathbf{x}$ . Velmi detailně se takovými integrály i příslušnými větami o integraci per partes zabývá [18].

Chceme-li dostat jednoznačné řešení (1) s (2), případně (3), (4), (5) nebo (6), potřebujeme ještě znát vhodné okrajové a počáteční podmínky. Pro jednoduchost se omezíme na počáteční podmínku

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{na } \partial\Omega, \quad (7)$$

Dirichletovu okrajovou podmínku

$$u = u_* \quad \text{na } \Theta \quad (8)$$

a Neumannovu okrajovou podmínku

$$\mathbf{g} \cdot \nu = g_* \quad \text{na } \Gamma, \quad (9)$$

kde  $u_0$  je známá funkce  $x$  a  $u_*$  a  $g_*$  jsou známé funkce  $x$  i  $t$ , přičemž pro  $t = 0$  na  $\Theta$  splývá (ve smyslu stop)  $u_*$  s  $u_0$ . Nově zde vystupují rovněž disjunktí části hranice  $\partial\Omega$  označené  $\Theta$  a  $\Gamma$ ; předpokládejme  $\partial\Omega = \Theta \cup \Gamma$  a označme ještě (pro další využití, v zájmu stručnosti zápisu)  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Theta$  namísto  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ , integrujeme-li pouze přes  $\Theta$ , a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$  namísto  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ , integrujeme-li pouze přes  $\Gamma$ .

## 11.2 Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků, jak jsme ji poznali v předcházejících kapitolách tohoto textu, se primárně zabývá numerickým řešením stacionárních úloh; pro nestacionární úlohy je ji vždy nutno vhodně kombinovat s dalšími metodami. Pro jednoduchost se nejprve soustředíme na stacionární úlohu, tj. v (1), (2) i (3) na případ, kdy  $f$  ani  $u$  nezávisí na  $t$ , a první aditivní člen v (1) a (3) je tedy roven nule, a současně v (8) a (9)  $u_*$  ani  $g_*$  nezávisí na  $t$ ; počáteční podmínka (7) je tak nadbytečná a nepoužitelná. Dosadíme-li (9) do (5), obdržíme

$$\langle \nabla v, a \nabla u \rangle = \langle v, f \rangle + \langle v, g_* \rangle_\Gamma + \langle v, (a \nabla u) \cdot \mathbf{n} \rangle_\Theta. \quad (10)$$

Nepříjemného posledního aditivního členu se zbavíme vhodnou volbou testovacích funkcí  $v$  jako libovolných funkcí z prostoru

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ na } \Theta\}. \quad (11)$$

Pro jednoduchost předpokládejme, že oblast  $\Omega$  je regulární,  $f \in L_2(\Omega)$ ,  $g_* \in L_2(\Gamma)$  a  $u_*$  lze rozšířit z  $\Theta$  na  $\Omega$  tak, aby  $u_* \in H^1(\Omega)$  a na  $\Theta$  splývalo s původním  $u_*$  ve smyslu stop. Zbývá tak najít  $\tilde{u} = u - u_* \in V$  vyhovující rovnici

$$\langle \nabla v, a \nabla \tilde{u} \rangle = F(v), \quad (12)$$

kde  $F$  je lineární zobrazení  $V$  do  $\mathbb{R}$  zavedené předpisem

$$F(v) = \langle v, f \rangle + \langle v, g_* \rangle_\Gamma + \langle \nabla v, a \nabla u_* \rangle. \quad (13)$$

Poněvadž v literatuře je pro zobrazení normovaných prostorů do  $\mathbb{R}$  obvykle vyhrazen název funkcionál, můžeme hovořit o  $F$  jako o lineárním funkcionálu na  $V$ ; je-li speciálně takovým normovaným prostorem  $\mathbb{R}^n$  pro  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ , mluví se o (reálné) funkci  $n$  (reálných) proměnných. V [13] se velmi obšírně a s četnými příklady dokazuje, že úloha (12) má za předpokladu nenulové míry  $\Theta$  na  $\partial\Omega$  právě jedno řešení. Základní myšlenku představuje použití Rieszovy věty o reprezentaci: každý lineární funkcionál na  $V$ , a tedy i  $F$  z (13), lze podle ní jednoznačně vyjádřit ve tvaru skalárního součinu prvku  $v$  s jistým jednoznačně určeným prvkem  $w$  v prostoru  $V$ . Zbývá tedy ověřit, že  $\langle \nabla v, a \nabla \tilde{w} \rangle$  má vlastnosti alternativního skalárního součinu v prostoru  $V$ , k čemuž se používá tzv. Friedrichsova nerovnost (a v obměnách našeho modelového příkladu Poincarého či Kornova nerovnost); pro podrobnější vysvětlení zde musíme odkázat na [13] a [18].

Poznamanejme ještě, že rovnice (12) je vhodná pro teoretickou analýzu, zatímco v softwarových realizacích se častěji používá její modifikace

$$\langle \nabla v, a \nabla u \rangle = \langle v, f \rangle + \langle v, g_* \rangle_\Gamma. \quad (14)$$

Zřejmou předností (14) je, že není třeba numericky uměle konstruovat rozšíření  $u_*$  z  $\Theta$  na  $\Omega$ . Řešení (14) je však třeba hledat na množině

$$U = \{v \in H^1(\Omega) : v = v_* \text{ na } \Theta\}, \quad (15)$$

zatímco i v (14) se (stejně jako v (12)) pracuje s libovolným  $v \in V$ .

V praktických výpočtech zpravidla nepracujeme s nekonečněrozměrným prostorem  $V$  z definice (11), ale s jistým prostorem  $V_n$  konečné dimenze  $n$ , jenž je vhodné uvažovat jako podprostor  $V$ ; případy, kdy to není (přinejmenším přesně) možné, např. při aproximaci nekonvexních oblastí v  $\mathbb{R}^3$  sosutavami konečných prvků v podobě čtyřstěnů, a odhady vzniklých chyb se jako tzv. variačními zločiny (anglicky *variational crimes*) důkladně zabývá [18]. Namísto  $\tilde{u} \in V$  hledáme takové  $\tilde{u}_n \in V_n$ , aby rovnice

$$\langle \nabla v_n, a \nabla \tilde{u}_n \rangle = F(v_n) \quad (16)$$

byla splněna pro jakékoliv  $v_n \in V_n$ . Je-li  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  báze  $V_n$ , můžeme vyjádřit  $u_n = c_1\phi_1 + \dots + c_n\phi_n$  s neznámými reálnými součiniteli  $c_1, \dots, c_n$ , což formálně (v tzv. Einsteinově sčítací konvenci, podle níž se sčítá přes opakované indexy v součinech) zapíšeme stručně jako  $u_n = c_i\phi_i$  pro sčítací index  $i \in \{1, \dots, n\}$ ; stejné

označení budeme používat i nadále. Zvolíme-li libovolný index  $j \in \{1, \dots, n\}$  a  $v_n = \phi_j$ , dostaneme z rovnice (16) soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\langle \nabla \phi_j, a \nabla \phi_i \rangle c_i = F(\phi_j). \quad (17)$$

První podmínky pro konvergenci posloupnosti prvků  $u_n \in V_n$  z (16) pro  $n \rightarrow \infty$  (pro lineární funkce  $\phi_j$  na polygonální oblasti  $\Omega$  v  $\mathbb{R}^2$  vyskládané z trojúhelníků,  $v_n$  je tedy lineární lagrangovský splajn a  $c_j$  lze ztotožnit s hodnotami  $\tilde{u}_n$  ve vrcholech trojúhelníků) k  $u$  z (12) v prostoru  $V$  pocházejí z [17]; o jejich zobecnění v mnoha směrech existuje obsáhlá literatura, jejíž přehled lze nalézt v [3]. Obecně je předností metody konečných prvků, že s poměrně jednoduchými bázemi  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  generuje soustavy lineárních algebraických rovnic typu (17) s řídkými maticemi soustav, pro něž jsou k dispozici rychlé a robustní algoritmy řešení; pro vyčíslení pravých stran bývá přitom nezbytné numerické integrování.

### 11.3 Ritzova - Galerkinova metoda

Stacionární úlohy v inženýrských aplikacích bývají často formulovány v podobě požadavku minimalizace potenciální energie na vhodném prostoru (případně jen jisté množině) přípustných funkcí. Pro naši modelovou úlohu považujme za takový prostor  $V$ , potenciální energii vyjádříme pro libovolné  $w \in V$  pomocí funkcionálu

$$G(w) = \frac{1}{2} \langle \nabla w, a \nabla w \rangle - F(w) \quad (18)$$

a hledíme minimum  $G$ . Studium stacionárních prvků funkcionálů a charakteru jejich extrémů se zabývá tzv. variační počet, s jehož základy se lze seznámit v [6]; dlouhý výklad [13] se omezuje pouze na lineární a kvadratické funkcionály a jen velmi okrajově se (na rozdíl od [10]) zabývá metodou konečných prvků a numerickými výpočty. Obdobně jako u funkce konečného počtu proměnných je pro jakýkoliv funkcionál  $G$  definovaný na  $V$  užitečné studovat (s pomocí reálného parametru  $\tau$ ) jeho diferenciál

$$DG(w, v) = \left( \frac{d}{d\tau} G(w + \tau v) \right) (\tau = 0) \quad (19)$$

v libovolném směru  $v \in V$ ; speciálně pro stacionární prvek  $w$  musí být vždy  $DG(w, v) = 0$ . Pro náš konkrétní funkcionál  $G$  z (18) je pak v (19) zřejmě  $w = \tilde{u}$ , a tedy

$$DG(\tilde{u}, v) = \langle \nabla v, a \nabla \tilde{u} \rangle - F(v) = 0. \quad (20)$$

Obdobným způsobem lze určit i druhý diferenciál

$$D^2G(\tilde{u}, v, v) = \langle \nabla v, a \nabla v \rangle \geq 0. \quad (21)$$

Z nerovnosti (21) lze pak vyvodit, že stacionární prvek  $\tilde{u}$  funkcionálu  $G$  z (18), vypočtený z (19), realizuje minimum  $G$  na  $V$ .

Postup založený na minimalizaci funkcionálu  $G$  z (18) kde se namísto prostoru  $V$  uvažuje opět jeho konečněrozměrná alternativa  $V_n$ , je (z historických důvodů) znám jako Ritzova metoda, zatímco postup vycházející z (12) bývá označován jako Galerkinova metoda. Poněvadž však (20) generuje podmínku (12), oba postupy zřejmě splývají, a lze tak hovořit o jediné Ritzově - Galerkinově metodě. To však už neplatí u nestacionární úlohy, kde nemáme k dispozici žádný vhodný funkcionál obdobný  $G$ , zatímco doplnění (12) o evoluční členy, pocházející z prvního členu (5), přináší jen nevelké technické problémy; zde se skutečně projevuje větší obecnost Galerkinovy metody.

Principiálně se Ritzova - Galerkinova metoda liší od metody konečných prvků jedině tím, že apriorně nepředpokládá konstrukci speciálních bázových funkcí na předem definovaných a postupně zjemňovaných sítích, jak jsme ji poznali v předchozích kapitolách, a tak obecně nevede k řídkým maticím soustavy v (17). Pro libovolnou bázi v  $V_n$  lze sice teoreticky konstruovat ekvivalentní bázi, která je dokonce ortogonální v  $V_n$  (příslušná matice soustavy by pak byla dokonce diagonální), známé algoritmy pro tuto konstrukci jsou však komplikované a dosti pomalé. Navzdory snahám o využití např. Fourierových řad a jejich zobecnění podle [1], dosud v praktických výpočtech převažují klasické konečné prvky s lokálními polynomickými bázemi.

Obsahuje-li modelová úloha nějaké nelinearity, např. v (2) je součinitel  $a$  závislý na  $u$  (což bývá běžné mj. při studiu kapilárního přenosu kapalné vlhkosti), celá teoretická analýza se výrazně komplikuje a pro praktické výpočty dostáváme namísto soustav lineárních algebraických rovnic (17) nelineární soustavy, jež je nutno řešit iteračními přístupy. V těchto případech je zapotřebí studovat jak klasické variační přístupy v [6], tak modernější výsledky v [14]. V některých složitějších případech, typicky pocházejících z termomechanických principů i), ii), iii), jmenovitě u Navierových - Stokesových rovnic proudění tekutin, stejně jako u Maxwellových rovnic elektromagnetického pole, však dosud nejsou k dispozici ani formální důkazy existence řešení, tím méně pak kvality konvergence výpočtových algoritmů, dokonce ani těch, jež jsou již dnes součástí komerčních softwarových nástrojů.

## 11.4 Metoda okrajových prvků

Pro řadu technicky významných stacionárních úloh jsou známa obecná řešení obdobných úloh, která však zpravidla nevyhovují potřebným okrajovým podmínkám. Pravděpodobně nejcitovanější výjimkou je řešení rovnic homogenního a izotropního lineárně pružného poloprostoru zatíženého osamělým břemenem; zde je však k dispozici přímo explicitní analytický výpočtový vzorec, a numerickou analýzou se tak vůbec nemusíme zabývat. V ostatních případech však může být znalost obecných řešení účinným nástrojem pro vývoj rychlejších výpočtových algoritmů, než jaké nabízí metoda konečných prvků. Výsledný postup je znám jako metoda okrajových prvků (anglicky *Boundary Element Method*).

Obdobným způsobem jako při úpravě (5) dostaneme z (6) ve stacionárním

případě

$$\begin{aligned} -\langle \nabla \cdot (a \nabla v), u \rangle &= \langle v, f \rangle \\ + \langle v, (a \nabla u) \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma} + \langle v, g_* \rangle_{\Theta} &- \langle (a \nabla v) \cdot \mathbf{n}, u \rangle_{\Gamma} - \langle (a \nabla v) \cdot \mathbf{n}, u_* \rangle_{\Theta}, \end{aligned} \quad (22)$$

příčemž za testovací funkci  $v$  můžeme pro libovolný bod  $\mathbf{x} \in \Omega$  volit obecné řešení rovnice

$$\nabla \cdot (a \nabla v(\mathbf{x}, \mathbf{y})) + \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad (23)$$

kde  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  označuje tzv. Diracovu distribuci, idealizující účinek jednotkového zatížení působícího v jediném bodě  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ . Zejména pro konstantní  $a = 1$  je známo

$$v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi r}, \quad \nabla v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2\pi r^2}, \quad r = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}; \quad (24)$$

odvození těchto vztahů je provedeno v [4], str. 43.

Zvolme nyní  $\phi_j = v(\cdot, \mathbf{y}_j)$  pro soustavu bodů  $\mathbf{y}_j$  na  $\partial\Omega$  a hledejme v diskrétní variantě rovnice (22) namísto  $u$  pouze  $u_n = c_i \phi_i$  (používající opět, obdobně jako u metody konečných prvků, indexy  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  a Einsteinovo sčítací pravidlo). Dostaneme tak

$$\begin{aligned} \langle \delta(\cdot, \mathbf{y}_j), \phi_i \rangle c_i &= \langle \phi_j, f \rangle \\ + \langle \phi_j, (a \nabla \phi_i) \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma} c_i + \langle \phi_j, v \rangle_{\Theta} g_* &- \langle (a \nabla \phi_j) \cdot \mathbf{n}, \phi_i \rangle_{\Gamma} c_i - \langle (a \nabla \phi_j) \cdot \mathbf{n}, u_* \rangle_{\Theta}. \end{aligned} \quad (25)$$

Limitním přechodem podle [4], str. 45, navíc vychází, že levou stranu (25) lze zapsat jako  $\kappa \phi_j c_j$ , kde se výjimečně nesčítá přes index  $j$ , přičemž  $\kappa = 1/2$  pro  $y_j$  v regulárních bodech hranice  $\partial\Omega$ , tj. takových, kde je spojitý průběh  $\mathbf{n}$ ; v ostatních případech (v singulárních bodech a na hranách) lze hodnoty  $\kappa \in (0, 1)$  odvodit (na základě věty o střední hodnotě integrálu) postupem naznačeným v [4], str. 45. Dostáváme tak opět soustavu lineárních algebraických rovnic, jen formálně poněkud složitější. Předností metody okrajových prvků je nicméně to, že neznámé  $c_1, \dots, c_n$  se vztahují jen k hranici  $\partial\Omega$ , zatímco u metody konečných prvků, stejně jako u obecné Ritzovy - Galerkinovy metody, k celé oblasti  $\Omega$ . Nevýhodou zůstává nutnost znalosti obecného řešení úlohy a povinnost (většinou numerické) integrace po křivých plochách  $\Theta$  a  $\Gamma$ .

## 11.5 Metoda konečných objemů

Mnohokrát kritizovanou nežádoucí vlastností metody konečných prvků je, že řešení  $u_n$  rovnice typu (16) nesplňuje původní fyzikální podmínky (rovnice rovnováhy, principy zachování apod.) dostatečně přesně a v transparentním smyslu, pouze prostřednictvím řešení  $u$  rovnice typu (12) a konvergence  $u_n$  k  $u$  pro  $n \rightarrow \infty$  v Sobolevově prostoru  $H^1(\Omega)$ . Zvolíme-li však speciálně  $v = 1$  v (10), dostaneme

$$-\langle 1, (a \nabla u) \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Theta} = \langle 1, f \rangle + \langle 1, g_* \rangle_{\Gamma}, \quad (26)$$



obecně však neplatí  $v \in V$ . Namísto  $v = 1$  v (26) můžeme nicméně volit postupně  $v = \chi(\Omega_k)$ , kde  $\chi(\cdot)$  označuje charakteristickou funkci příslušné množiny (nabývající hodnoty 1 pro  $\mathbf{x}$  patřící do množiny, 0 jinak) a  $\Omega_k$  pro  $k \in \{1, \dots, m\}$ , kde  $m$  je počet uvedených množin, jsou disjunktní podoblasti  $\Omega$ , uzávěr jejichž sjednocení v  $\mathbb{R}^3$  (tedy množina všech bodů, které patří některé z oblastí  $\Omega_k$  nebo její hranici  $\partial\Omega_k$ ) je roven uzávěru oblasti  $\Omega$  v  $\mathbb{R}^3$ . Z této myšlenky vychází metoda konečných objemů (anglicky *Finite Volume Method*).

Označíme-li indexem  $k$  integrál přes  $\Omega_k$  namísto přes  $\Omega$  (bez indexu), indexem  $\Theta k$  integrál přes  $\partial\Omega_k \cup \Theta$ , indexem  $\Gamma k$  integrál přes  $\partial\Omega_k \cup \Gamma$  a konečně indexem  $kl$  integrál přes  $\partial\Omega_k \cup \partial\Omega_l$  pro libovolný z indexů  $l \in \{1, \dots, m\}$  odkazující na sousední podoblast k  $\Omega_k$  (tj. takovou, že průnik hranic  $\partial\Omega_k$  a  $\partial\Omega_l$  je nenulové míry), namísto (26) obdržíme

$$-\langle 1, (a\nabla u) \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Theta k} = \langle 1, f \rangle_k + \langle 1, g_* \rangle_{\Gamma k} + \sum_{l \in N_k} \langle 1, q \rangle_{kl}, \quad (27)$$

kde  $N_k$  znamená množinu všech sousedních podoblastí k  $\Omega_k$  a  $q_{kl}$  jsou tzv. numerické toky, obecně závislé na poloze  $x \in \partial\Omega_k \cup \partial\Omega_l$ , které zpravidla předem neznáme. Jednotkový vektor normály  $\mathbf{n}$  se zde zavádí i na  $\partial\Omega_k \cup \partial\Omega_l$ ; namísto vnější normály je však třeba pracovat s normálou smluvené (a důsledně dodržované) orientace. Počet  $m_*$  všech možných dvojic indexů  $k, l$  v (27) může být na první pohled až  $m(m-1)/1$ , ve skutečnosti však bývá podstatně menší, zejména v případě promyšleného rozkladu  $\Omega$  na podoblasti; obecně nicméně jde o netriviální úlohu z teorie grafů.

Dosadíme-li jako v metodě konečných prvků do (26) namísto  $u$  pouze  $u_n = c_i \phi_i \in V_n$  a považujeme-li (pro dostatečně malé podoblasti  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ )  $q_{kl}$  za konstanty, dostaneme

$$-\langle 1, (a\nabla \phi_i) \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Theta k} c_i = \langle 1, f \rangle_k + \langle 1, g_* \rangle_{\Gamma k} + \sum_{l \in N_k} A_{kl} q_{kl}, \quad (28)$$

kde  $A_{kl}$  je obsah  $\partial\Omega_k \cup \partial\Omega_l$ . Soustava (28) tak obsahuje  $n$  rovnic o  $n + m_*$  neznámých. Zbývajících  $m_*$  rovnic dostaneme z podmínek zachování numerického toku mezi jednotlivými podoblastmi

$$\pm \langle 1, a\nabla \phi_i \cdot \mathbf{n} \rangle_{kl} = A_{kl} q_{kl}, \quad (29)$$

přičemž znaménko na levé straně závisí na smluvené orientaci normály.

Pro stacionární úlohy se práce se soustavou (28) a (29), jež obsahuje  $n + m_*$  rovnic oproti  $n$  rovnicím soustavy (17), nezdá být příliš výhodná. Často se s metodou konečných objemů kombinuje metoda konečných prvků, případně se aspoň využívají některé její technické kroky (jako v naší modelové úloze). Metoda konečných prvků a metoda konečných objemů však pracují s odlišnými rozklady  $\Omega$ ; nejjednodušší vysvětlení se obvykle podává u dvourozměrné polygonální oblasti  $\Omega$ , která se rozloží na trojúhelníkové konečné prvky a lineárními lagrangovskými

splajny (což je tzv. primární rozklad), zatímco konečné objemy (zde vlastně obsahy) v podobě našich podoblastí  $\Omega_k$  (tvořící tzv. sekundární rozklad) se konstruují podle následujícího algoritmu:

- i) postupně se procházejí všechny uzly (vrcholy) primárního rozkladu,
- ii) k vybranému uzlu se najdou všechny příslušné prvky (trojúhelníky) primárního rozkladu,
- iii) spojením všech těžišť navzájem sousedních prvků (trojúhelníků) podle ii) vznikne vždy hranice jednoho prvku (polygonu) sekundárního rozkladu.

Každý prvek sekundárního rozkladu je tak nakonec vázán na uzel primárního rozkladu. Zobecnění tohoto algoritmu (v principu stejného, jen se složitějšími formulacemi i), ii) a iii)) pro trojrozměrný případ (s čtyřstěny, polyedry atd.) ponecháváme pečlivému čtenáři.

Podstatně důkladnější úvod do teorie metody konečných objemů lze nalézt v [5], str. 71. Přínos metody konečných objemů se projevuje zejména u úloh proudění tekutin, dokonce i u těch, kde teorie řešitelnosti není dosud uzavřena, díky speciálním typům interpolace pro numerické toky podle [5], str. 76. Jmenovitě algoritmy obou dalších metod, jimiž se ještě budeme zabývat, lze modifikovat úplným či částečným využitím (pro vybrané proměnné) metody konečných objemů, i když jejich formulace budou (pro jednoduchost zápisu) vycházet z metody konečných prvků.

## 11.6 Rotheho metoda

Pro řešení evolučních úloh představuje metoda konečných prvků (případně metody jí podobné) jen dílčí nástroj, jež je zapotřebí doplnit dalším. Již při studiu stacionárního vedení tepla jsme se zmiňovali o Eulerově metodě (v implicitní a explicitní verzi) a Crankově - Nicholsonově metodě. První z nich bývá nejčastěji základem metody, již [11] nazývá metodou časové diskretizace, ve většině publikací včetně [8] a [14] se však hovoří o Rotheho metodě, což zdůrazňuje skutečnost, že tato metoda je založena na studiu vlastností tzv. Rotheho posloupností abstraktních funkcí z prostoru  $L_2(I, V)$ , jímž rozumíme prostor zobrazení konečného časového intervalu  $I = [0, T]$ , kde  $T$  je přede známý koncový čas, s počátkem v nulovém čase do prostoru  $V$ , a jeho různých modifikací a zobecnění; studovat lze i limitní přechod  $T \rightarrow \infty$ , jenž může (za jistých podmínek) vést ke stacionárnímu stavu. V prostoru  $L_2(I, V)$  lze přitom definovat pro jeho každé 2 prvky  $v(\mathbf{x}, t)$  a  $w(\mathbf{x}, t)$  skalární součin jako integrál v proměnné  $t$  přes časový interval  $I$  z  $\langle v(\cdot, t), w(\cdot, t) \rangle$ ; totéž platí, nahradíme-li  $V$  jiným vhodným prostorem se skalárním součinem. Studujeme-li [11], navazující přímo na [13] (pro řešení stacionárních úloh), a poté postupně [8] a [14], přesvědčíme se o rychlém vývoji teoretických i výpočtových výsledků souvisejících s touto metodou v posledních desetiletích.

Rotheho metoda vychází z formulace (5) v jistém časovém kroku  $t_s^r = sh_r$ , kde  $h_r = T/r$  pro zadaný počet dílků  $r \in \{1, 2, \dots\}$  a index  $s$  se volí z množiny

$\{1, \dots, r\}$ ; přirozeně lze potom studovat limitní přechod  $r \rightarrow \infty$ . Časová derivace se na každém časovém kroku nahrazuje způsobem známým z metody sítí. Namísto správných hodnot  $u(\cdot, t_s^r)$  tak dostáváme jisté aproximace  $u_s^r$ ; v čase  $t = 0$  máme vždy k dispozici správné hodnoty  $u_0$  (závislost na proměnné  $x \in \Omega$  zde již explicitně nezdůrazňujeme). Postupně pro  $s \in \{1, \dots, r\}$  tak vychází

$$\left\langle v, \frac{u_s^r - t_{s-1}^u}{h_r} \right\rangle + \langle \nabla v, a \nabla u_s^r \rangle = \langle v, f_s^r \rangle + \langle v, g_{*s}^r \rangle_{\Gamma}, \quad (30)$$

přičemž za  $f_s^r$  považujeme střední hodnotu  $f(\cdot, t)$  pro  $t \in I_s^r = (t_{s-1}, t_s]$  a za  $g_{*s}^r$  střední hodnotu  $g_*(\cdot, t)$  opět pro  $t \in I_s^r$ . Tato časová diskretizace (odtud pochází název metody používaný v [11] odpovídá právě implicitní Eulerově metodě, s níž budeme pracovat v dalším výkladu.

V případě explicitní Eulerovy metody se pouze  $u_s^r$  ve druhém aditivním členu na levé straně (30) nahradí  $u_{s-1}^r$  a v případě explicitní Eulerovy metody se totéž  $u_s^r$  nahradí  $(u_s^r + u_{s-1}^r)/2$ ; obecně se tedy  $u_s^r$  nahradí jistým  $\alpha u_s^r + (1 - \alpha)u_{s-1}^r$  pro  $\alpha \in [0, 1]$ . Speciálně tak máme  $\alpha = 1$  pro implicitní Eulerovu metodu,  $\alpha = 1/2$  pro Crankovu - Nicholsonovu metodu a  $\alpha = 0$  pro explicitní Eulerovu metodu.

Poněvadž v (30) neznáme pouze  $u_s^r$ , je další numerická analýza (30) ekvivalentní analýze (14). Mimo časovou diskretizaci lze potom provést i diskretizaci (30), např. metodou konečných prvků. Odpověď na otázku, nakolik různá diskretizace na  $I$  a na  $\Omega$  ovlivní konvergenci numerických algoritmů k řešení původní úlohy, však není obecně jednoduchá. Rotheho metoda se primárně soustředí na sestavení posloupností, které konvergují k řešení (5) nezávisle na speciální diskretizaci na  $\Omega$ ; v tomto smyslu se obvykle hovoří o tzv. nepodmíněné konvergenci.

Pro libovolné  $t \in I_s^r$  označme

$$\begin{aligned} u^r(t) &= u_{s-1}^r + \frac{t - t_{s-1}}{h_s^r} (u_s^r - u_{s-1}^r), \\ \bar{u}^r(t) &= u_s^r, \quad \dot{u}^r(t) = \partial u^r(t) / \partial t = \frac{1}{h_s^r} (u_s^r - u_{s-1}^r). \end{aligned} \quad (31)$$

Tyto vztahy definují avízované Rotheho posloupností. S jejich pomocí můžeme, zavedeme-li též  $f^r$  a  $g^r$  obdobně  $\bar{u}^r$ , snadno přepsat (30) ve tvaru

$$\langle v, \dot{u}^r \rangle + \langle \nabla v, a \nabla \bar{u}^r \rangle = \langle v, f^r \rangle + \langle v, g^r \rangle_{\Gamma}. \quad (32)$$

Na základě jistých apriorních odhadů vycházejících z omezenosti Rotheho posloupností, vět o vnoření prostorů abstraktních funkcí a dalších netriviálních poznatků z moderní matematické analýzy lze dospět k závěrům

$$\begin{aligned} u^r(t) &\rightarrow u(t) \quad \text{v } H^1(\Omega) \quad \text{pro jakékoliv } t \in I, \\ \bar{u}^r &\rightarrow u \quad \text{v } L_2(I, H^1(\Omega)), \quad \dot{u}^r \rightarrow \dot{u} \quad \text{v } L_2(I, L_2(\Omega)), \end{aligned} \quad (33)$$

přičemž  $u^1, u^2, \dots$  i  $u$  patří do množiny  $U$  podle (15) a  $\dot{u}(t)$  uvádíme (pro přehlednost) namísto  $\partial u(t) / \partial t$  pro každé  $t \in I$ .

Uvedený postup lze (jen s drobnými technickými komplikacemi) zopakovat pro každé  $\alpha \in [1/2, 1]$ , ne však pro žádné  $\alpha \in (0, 1/2)$ . To má svůj nepříjemný důsledek např. při používání explicitní Eulerovy metody, která jinak vede při plné diskretizaci k nejjednodušším soustavám lineárních algebraických rovnic: je třeba volit velmi krátké kroky  $h_r$ , navíc s ohledem na diskretizaci na  $\Omega$ .

## 11.7 Fourierova metoda

Konkurenceschopnou alternativou Rotheho metody se zdá být obrácený postup diskretizace: nejprve se provede diskretizace na  $\Omega$  a až následně (je-li to nezbytné) na  $I$ . Tento přístup se tradičně nazývá metoda přímek (anglicky *Method of Lines*), mimo dosti vzácné případy (mj. populární rovnici kmitání struny) jež lze řešit analyticky nebo semianalyticky (s pomocí vhodných nekonečných řad), prezentované v [12], str. 901, však dospíváme od multiplikativního rozkladu typu

$$\tilde{u}(\mathbf{x}, t) = \phi_i(\mathbf{x})\psi_i(t), \quad (34)$$

jež opět naznačuje sčítání přes  $i \in \{1, \dots, n\}$ , pro známé funkce  $\phi_i(\mathbf{x})$  a  $\psi_i(t)$  (přičemž  $\psi_i(t)$  zahrnují (jak uvidíme dále) i neznámé součinitele  $c_i$ ), typického pro klasickou Fourierovu metodu, k nepříjemné povinnosti řešit poměrně rozsáhlé soustavy obyčejných lineárních diferenciálních (nikoliv jako dosud algebraických) rovnic. Naznačíme přesto aspoň základní myšlenku této metody; instruktivní (ač jednorozměrný) příklad jejího použití na vlastní kmitání stožáru s aplikací kubických hermitovských splajnů je uveden v [15]. S Fourierovou metodou se lze důkladně seznámit v [1], str. 215.

Vyjďeme opět od (12), kam dosadíme (34). Pro  $v = \phi_j$  vychází

$$M_{ji}\dot{\psi}_i + K_{ji}\psi_i = b_j, \quad (35)$$

kde tečkou (pro stručnost zápisu) opět naznačujeme derivování podle  $t$  a navíc pracujeme se zjednodušeným označením

$$M_{ji} = \langle \phi_j, \phi_i \rangle, \quad K_{ji} = \langle \nabla \phi_j, a \nabla \phi_i \rangle, \quad b_j = F(\phi_j). \quad (36)$$

V dalším budeme pracovat s indexy  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$  jako Einsteinovými sčítacími indexy. Prvky  $M_{ji}$  a  $K_{ji}$  z (36) vytvářejí pozitivně definitní čtvercové matice, jež se v inženýrské literatuře často nazývají maticemi hmotnosti a tuhosti, a to i bez vazby na konkrétní fyzikální problém. Ke druhé z matic lze tedy sestavit inverzní matici s prvky  $K_{ik}^{-1}$ . Řešme nejprve zkrácenou (homogenní) soustavu rovnic příslušnou k (35), tj. takovou, která má namísto  $b_j$  pravou stranu sestávající z nul, a obecné řešení této soustavy hledejme ve tvaru

$$\psi_i = V_{ik} \exp(-\lambda_k t) c_k, \quad \dot{\psi}_i = -V_{ik} \lambda_k \exp(-\lambda_k t) c_k, \quad (37)$$

tedy jako řešení zobecněné charakteristické rovnice

$$M_{ji} V_{ik} \lambda_k = K_{ji} V_{ik}. \quad (38)$$

V (38) lze zřejmě  $\lambda_k$  identifikovat s vlastními čísly, zatímco sloupce  $V_{ik}$  skrývají příslušné vlastní vektory;  $\psi_i$  z (37) splňuje (38) automaticky. Věřme, že rovnici (38) umíme řešit vhodným numerickým algoritmem. Díky velmi speciální pravé straně podle (36) pak můžeme sestavit rovněž obecné řešení (35)

$$\psi_i = K_{ik}^{-1}b_k + V_{ik} \exp(-\lambda_k t)c_k. \quad (39)$$

Zbývá ještě nastavit součinitele  $c_1, \dots, c_n$  tak, aby byla splněna počáteční podmínka (7), tedy aby platilo

$$u_0 \approx \phi_i \psi_i(0) = \phi_i (K_{ik}^{-1}b_k + V_{ik} \exp(-\lambda_k t)c_k) \quad \text{na } \Omega \quad (40)$$

v nějakém rozumném smyslu; přesné splnění takové podmínky s ohledem na konečné  $n$  není realistické. K tomu se obvykle používá metoda nejmenších čtverců (anglicky *Least Squares Method*), známá z mnoha jiných matematických aplikací i mimo oblast diferenciálních rovnic. Namísto vágní formulace (40) s její pomocí dostaneme

$$(\phi_j, u_0) = (\phi_j, \phi_i)(K_{ik}^{-1}b_k + V_{ik} \exp(-\lambda_k t)c_k). \quad (41)$$

Pouhým přeskládáním jednotlivých aditivních členů (41) vychází

$$(\phi_i, \phi_j)V_{ik}c_k = (\phi_j, u_0) - (\phi_j, \phi_i)K_{ik}^{-1}b_k, \quad (42)$$

což už je pouhá soustava  $n$  lineárních algebraických rovnic o  $n$  neznámých  $c_1, \dots, c_n$ . Hlavní obtíž tak zůstává (dostatečně přesné) nalezení čísel  $V_{kl}$  vhodnou iterační metodou.

## Použitá a doporučená literatura

- [1] Barták J., Herrmann L., Lovicar V., Vejvoda O. *Partial Differential Equations of Evolution*. Ellis Horwood, Chichester, a SNTL, Praha, 1991.
- [2] Bermúdez de Castro A. *Continuum Thermomechanics*. Birkhäuser, Basel, 2005.
- [3] Brenner S.C., Scott L.R. *The Mathematical Theory of Finite Element Method*. Springer, New York, 2002.
- [4] Brož P., Procházka P. *Metoda okrajových prvků v inženýrské praxi*. SNTL, Praha, 1987.
- [5] Ferziger J.H., Perić P. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, 2002.
- [6] Fučík S., Kufner A. *Nonlinear Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam, 1980.

- [7] Jarošová P., Šťastník S., Vala J. Modelování přenosu tepla pro energeticky úsporné stavby. *Zborník konferencie Construmat* v Nitre, 2013, str. 138-149.
- [8] Kačur J. *Method of Rothe in Evolution Equations*. Teubner-Texte zur Mathematik 80, Leipzig, 1985.
- [9] Kuneš J. *Modelování tepelných procesů*. SNTL, Praha, 1989.
- [10] Kolář V., Kratochvíl J., Leitner F., Ženíšek A. Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků. SNTL, Praha, 1979.
- [11] Rektorys K. *Metoda časové diskretizace a parciální diferenciální rovnice*. SNTL, Praha, 1985.
- [12] Rektorys K. *Přehled užití matematiky*. SNTL, Praha, 1968.
- [13] Rektorys K. *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*. SNTL, Praha, 1974.
- [14] Roubíček T. *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*. Birkhäuser, Basel, 2005.
- [15] Tryhuk V. a kol. *Příklady aplikací vysokoškolské matematiky ve výuce předmětů specializací na FAST*. FAST VUT, Brno, 2009.
- [16] Vala J. Multiphase modelling of thermomechanical behaviour of early-age silicate composites. In: *Mass Transfer in Multiphase Systems and its Applications* (El-Amin M., ed.), Chap. 3. InTech, Rijeka, 2011, 49–66.
- [17] Zlámal M. On the finite element method. *Numerische Mathematik* 12 (1968), 394–409.
- [18] Ženíšek A. *Sobolevovy prostory*. VUTIUM, Brno, 2001.