# Použitie Laplaceovej transformácie pri identifikácii prechodových funkcií v technických výpočtoch

Jana Boržíková
*Fakulta výrobných technológií, Technická univerzita Košice so sídlom v Prešove*
*e-mail:* borzikova.jana@fvt.sk

## 1. Úvod

V technickej praxi sa stretávame s úlohou vytvoriť model a popísať technický proces pomocou diferenciálnej rovnice alebo sústavy diferenciálnych rovníc. Nameraním diskrétnych hodnôt prechodovej funkcie môžeme získať riešenie tejto diferenciálnej rovnice. Článok ukazuje ako využiť poznatky z Laplaceovej transformácie na určenie prenosu (t.j. ľavej strany diferenciálnej rovnice) podľa riešenia rovnice.
Ako príklad je v texte uvedená úloha, riešená v rámci projektu na našej katedre: nájsť model pneumatického umelého svalu na základe nameraných hodnôt prechodovej funkcie. Pri aproximácii prechodových funkcií je dôležité na základe zhodnotenia tvaru prechodovej funkcie rozhodnúť o type prenosu, ktorým budeme systém aproximovať.

## 2. Využitie Laplaceovej transformácie pri riešení technických úloh

Nech je náš systém popísaný diferenciálnou rovnicou 2. rádu s konštantnými koeficientmi:

$$T_0 y'' + 2T_0\xi\, y' + y = u(t) \tag{1}$$

Nech je hľadaná funkcia *y* funkciou kontrakcie na čase *k* = *f*(*t*). Počiatočné podmienky sú $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$. Potom obraz diferenciálnej rovnice v Laplaceovej transformácii je:

$$T_0\left[s^2 y(s) - sy(0) - y'(0)\right] + 2T_0\xi\left[sy(s) - y(0)\right] + y(s) = u(s) \tag{2}$$

$$y(s) = \frac{u(s)}{\left[T_0 s^2 + 2T_0\xi\, s + 1\right]} \tag{3}$$

Nech vstupom nášho systému je normovaná skoková funkcia *u*(*t*) = *1*, potom $u(s) = \frac{1}{s}$ a

$$y(s) = \frac{1}{s\left[T_0 s^2 + 2T_0\xi\, s + 1\right]}. \tag{4}$$

Z matematického hľadiska povieme, že výraz v menovateli zlomku nemá reálne korene.
Po rozklade na parciálne zlomky dostávame:

$$y(s) = \frac{1}{s} - \left( \frac{s + \frac{\xi}{T_0}}{\left[\left(s + \frac{\xi}{T_0}\right)^2 + \frac{1-\xi^2}{T_0{}^2}\right]} + \frac{\frac{2\xi}{T_0} - \frac{\xi}{T_0}}{\left[\left(s + \frac{\xi}{T_0}\right)^2 + \frac{1-\xi^2}{T_0{}^2}\right]} \right) \tag{5}$$

Čo po spätnej Laplaceovej transformácii je

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{\xi}{T}.t}.\left( \cos\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.\sin\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t \right) \tag{6}$$

Z nameranej prechodovej funkcie získame nasledujúce hodnoty: označme periódu medzi dvoma extrémami $T_A$, prvý extrém $A_1$, druhý $A_2$. Situácia je znázornená na obrázku 1. v článku. Výpočet parametrov $\xi$, $T$ potom vychádza z nasledujúcich viet (Noskievič, 1999):

1. Nech ω je frekvencia výstupného signálu potom perióda (vzdialenosť dvoch extrémov) $T_A = \frac{2\pi}{\omega}$ a súčasne je $\omega = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$, potom pre $T$ platí vzťah:

$$T = \frac{T_A\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi} \tag{7}$$

2. Nech $A_1$ je amplitúda v $\frac{T_A}{2}$ a platí $A_1 = \left(e^{-\frac{\xi}{T}t}\right)_{\frac{T_A}{2}}$, $A_2$ je amplitúda v $\frac{3.T_A}{2}$ a platí $A_2 = \left(e^{-\frac{\xi}{T}t}\right)_{\frac{3.T_A}{2}}$, potom pre $\xi$ platí vzťah

$$\xi = \pm\frac{\ln^2\left(\frac{A_1}{A_2}\right)}{\sqrt{4\pi^2 + \ln^2\frac{A_1}{A_2}}} \text{ alebo } \xi = \pm\frac{\ln^2(A_1)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 A_1}} \tag{8A, 8B}$$

# 3 Výsledky experimentálneho riešenia uvedeného problému

Funkčnosť a statické vlastnosti antagonistického systému obsahujúceho umelý sval je popísaná v (Balara, Boržíková, 2005)

Hodnoty boli zaznamenané pre umelý sval pod záťažou (45 N ≅ 4,5 kg) a pri konštantnom tlaku napĺňania ($p$ = 3,5 bar). Zo skúmaného javu je zrejmé, že interval $t \in \langle 1{,}5;\ 2{,}9\rangle$ je pásmo necitlivosti, t. j. umelý sval nereaguje na napúšťaný vzduch. Na intervale $t \in \langle 2{,}9;\ 3{,}5\rangle$ je pásmo napĺňania, t. j. umelý sval reaguje na napĺňania vzduchom. Hodnota kontrakcie sa nakoniec ustáli na hodnote $k_0 = 36$.

Hodnoty znormujeme a začiatok kontrakcie posunieme do nuly. Nech z merania sú zistené hodnoty: $A_1 = 0{,}00974$ a $A_2 = 0{,}006494$, $T_A = 0{,}2$.

Potom podľa vzťahu (8B) bude ξ = 0,827577, podľa (7) $T$ = 0,035755. A po dosadení do (6) bude mať prechodová funkcia tvar:

$$v(t) = 1 - e^{-23{,}14577.t+0{,}577407}.\sin(15{,}69878.t + 0{,}596019) \tag{9}$$

Keďže systém vykazuje dopravne oneskorenie, tak podľa vety o posunutí vzoru bude mať prenos predpis:

$$G(s) = \frac{1}{0{,}00128s^2 + 0{,}05918s + 1}.e^{-2{,}9t}$$

## Literatúra


[1] Balara, M., Boržíková, J. The mathematical description of characteristics of pneumatic artificial muscles. In: *DAAAM International Scientific Book.* ISSN 1726-9687.

[2] Noskievič, P. *Modelování a identifikace systému*, Praha, 1999, ISBN 80-7225-030-2.