Historické extremální úlohy

Pavlína Račková
Univerzita obrany, Fakulta vojenských technologií, Katedra matematiky a fyziky
e-mail: pavlina.rackova@unob.cz

Abstrakt

V článku jsou uvedeny některé historické extremální úlohy od dob antiky až do 18. století, které řešili význanmní matematici, a po nichž jsou tyto úlohy pojmenovány. Většina z nich je z geometrie a každá je řešena originálním způsobem, protože obecné postupy řešení extremálních úloh nebyly ještě známy.

Extremální úlohy najdeme v pracích řady antických matematiků, jako např. u Eukleida[1], Archiméda[2], Apollónia[3], Héróna[4] a dalších. Většina antických extremálních úloh byla geometrického charakteru, ale jen částečně byly odůvodněny praktickými potřebami. Pravděpodobně základním předpokladem pro jejich vznik bylo přání ukázat krásu samotné geometrie.

Se zánikem antické civilizace zaniká v Evropě vědecká činnost přibližně až do 15. století. Od 16. století se pak kromě geometrických úloh začínají objevovat i algebraické extremální úlohy.

Až do 17. století nebyly vypracovány žádné obecné metody pro řešení extremálních úloh, ale každá úloha se řešila speciálně pro ni vypracovanou metodou. Teprve J. Kepler[5] formuluje první obecná pravidla pro řešení extremálních úloh.

Ukažme zde několik úloh z děl antických matematiků a matematiků 17. a 18. století.

Příklad 1 (Eukleidova úloha)**.**
Do daného trojúhelníku ABC vepište rovnoběžník $ADEF$ největšího obsahu.

Řešení. Vrcholy D', E', F' hledaného rovnoběžníku jsou středy příslušných stran daného trojúhelníku (obr. 1). Důkaz lze provést několika způsoby, např. lze dokázat, že obsahy rovnoběžníků $D'DGE'$ a $FHE'F'$ jsou stejné. Odtud plyne, že obsah rovnoběžníku $ADEF$ je menší než obsah rovnoběžníku $AD'E'F'$, neboť obsah rovnoběžníku $AD'E'F'$ je roven obsahu obrazce $ADGE'HF$ obsahujícího rovnoběžník $ADEF$.

Příklad 2 (Zobecněná Eukleidova úloha)**.**
Na libovolně zvolené stěně čtyřstěnu zvolte bod, kterým veďte roviny rovnoběžné se zbývajícími stěnami. Bod zvolte tak, aby objem vzniklého rovnoběžnostěnu byl maximální viz obr. 2.

Řešení. Označme vrcholy čtyřstěnu A, B, C, D, hledaný bod X. Umístěme tento čtyřstěn v souřadnicové soustavě tak, že pro souřadnice vrcholů platí $A = [0, 0, 0]$, $B = [x_1, y_1, 0]$, $C = [0, y_2, 0]$, $D = [x_3, y_3, z_3]$. Pro souřadnice bodu X platí $X = [x_0, y_0, z_0]$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že bod X leží ve stěně ADC. Potom platí $x_0 \in (0, x_3)$, $y_0 \in \left(\frac{y_3}{x_3}x_0, \frac{y_3-y_2}{x_3}x_0 + y_2\right)$,

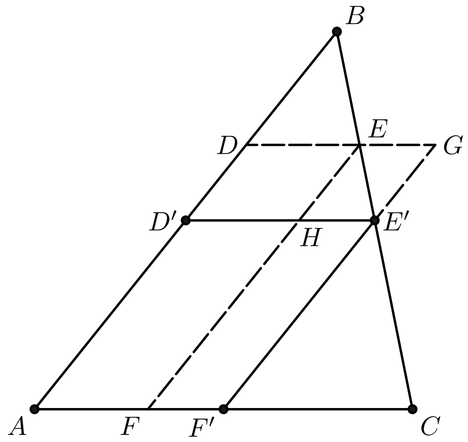
[1]**Eukleides z Alexandrie** (asi 340–278 př. n. l.) — starořecký matematik, zabýval se geometrií, optikou a teorií hudby.

[2]**Archimédés ze Syrakús** (asi 287–212 př. n. l.) — starořecký matematik, mechanik, fyzik, astronom a konstruktér.

[3]**Apollónios z Pergy** (asi 260–190 př. n. l.) — starořecký matematik a astronom, autor prací o kuželosečkách.

[4]**Hérón z Alexandrie** (asi 1. st. n. l.) — starořecký matematik a mechanik, odvodil obsahy a objemy některých geometrických útvarů v rovině a v prostoru.

[5]**Johannes Kepler** (1571–1630) — německý matematik a astronom, provedl řadu výpočtů objemů těles (zejména kubatur sudů).



Obr. 1:

$z_0 = \frac{z_3}{x_3} x_0$. Dále označme těžiště stěny ADC jako T, jeho souřadnice jsou $T = \left[\frac{x_3}{3}, \frac{y_2+y_3}{3}, \frac{z_3}{3}\right]$. Stanovíme rovnici roviny ABC

$$z = 0$$

a vzdálenost bodu X od roviny ABC

$$d_1 = z_0 = \frac{z_3}{x_3} x_0.$$

Dále stanovíme rovnici roviny ABD

$$y_1 z_3 x - x_1 z_3 y + (x_1 y_3 - x_3 y_1) z = 0,$$

vzdálenost bodu X od roviny ABD

$$d_2 = \frac{x_1 z_3 (y_3 x_0 - x_3 y_0)}{M},$$

kde $M = x_3 \sqrt{y_1^2 z_3^2 + x_1^2 z_3^2 + (x_1 y_3 - x_3 y_1)^2}$, rovnici roviny CBD

$$(y_1 - y_2) z_3 x - x_1 z_3 y + (x_1 y_3 - x_1 y_2 - x_3 y_1 + x_3 y_2) z + x_1 y_2 z_3 = 0$$

a vzdálenost bodu X od roviny CBD

$$d_3 = \frac{x_1 z_3 \left[(y_3 - y_2) x_0 - x_0 y_0 + x_3 y_2\right]}{M}.$$

Objem rovnoběžnostěnu je funkcí součinu délek jeho hran $l_1 l_2 l_3$. Plocha podstavy je funkcí součinu délek jejích stran $l_2 l_3$ ($l_2 l_3 = k_2 d_2 k_3 d_3$), tedy

$$\begin{aligned} P &= K d_2 d_3 = \\ &= K \left(\frac{x_1 z_3}{M}\right)^2 (y_3 x_0 - x_3 y_0) \left[(y_3 - y_2) x_0 - x_3 y_0 + x_3 y_2\right], \end{aligned}$$

K, k_2, k_3 jsou konstanty. Tato plocha pro dané x_0 bude největší, když $P'(y_0) = 0$, tj. když

$$y_0 = \frac{x_0 (2y_3 - y_2) + x_3 y_2}{2x_3}.$$

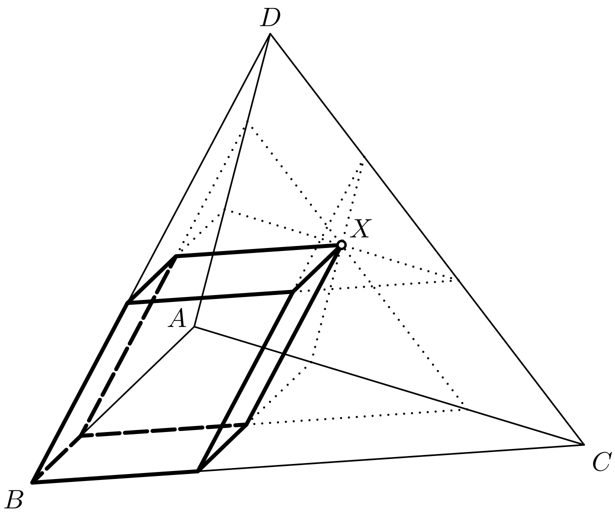
Pak

$$P_{\max} = K \left(\frac{x_1 y_2 z_3}{2M}\right)^2 (x_0 - x_3)^2.$$

Objem rovnoběžnostěnu bude největší, když $V'(x_0) = \left[P_{\max}(x_0) \cdot d_1(x_0)\right]' = 0$, tj. když

$$x_0 = \frac{x_3}{3}.$$

Druhý stacionární bod $x_0 = x_3$ nepatří do otevřeného intervalu $(0, x_3)$. Pro $x_0 = \frac{x_3}{3}$ je $y_0 = \frac{y_2+y_3}{3}$ a $z_0 = \frac{z_3}{3}$. Objem rovnoběžnostěnu bude největší, když hledaný bod bude ležet v těžišti zvolené stěny.



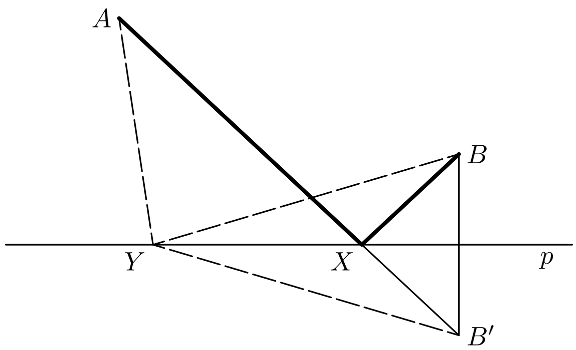
Obr. 2:

Příklad 3 (Hérónova úloha)**.**
Nechť A, B jsou různé body ležící ve stejné polorovině vyťaté přímkou p. Najděte bod $X \in p$ tak, aby součet $|AX| + |BX|$ byl minimální.

Řešení. Hledáme na přímce p bod X tak, aby délka lomené čáry AXB byla minimální. Při řešení této úlohy použijeme osovou souměrnost. Hledaný bod $X = p \cap AB'$, kde bod B' je osově souměrný podle přímky p s bodem B. Z obr. 3 je patrné a z vlastností osové souměrnosti vyplývá, že

$$|AX| + |XB| = |AX| + |XB'| = |AB'|,$$

a tedy délka lomené čáry AXB je minimální.



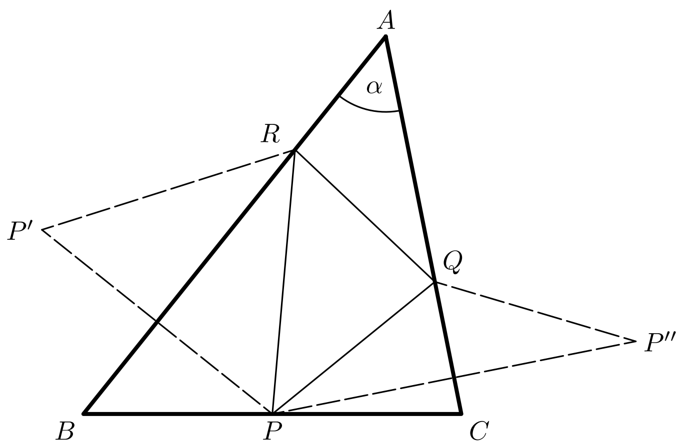
Obr. 3:

Ukážeme, že tato lomená čára je skutečně nejkratší. Nechť $Y \in p$ je libovolný bod. Potom na základě osové souměrnosti a trojúhelníkové nerovnosti platí (obr. 3):

$$|AY| + |YB| = |AY| + |YB'| \geq |AB'| = |AX| + |XB'| = |AX| + |XB|.$$

Úloha má vždy jedno řešení.

Příklad 4 (Úloha Fagnano di Toschi[1]).
Do daného ostroúhlého trojúhelníku ABC vepište trojúhelník PQR tak, aby jeho obvod byl minimální.



Obr. 4:

Řešení. Do trojúhelníku ABC vepíšeme libovolný trojúhelník PQR s obvodem o tak, aby $P \in BC$, $Q \in AC$ a $R \in AB$ (obr. 4). Sestrojíme body P', P'' tak, aby platilo: bod P' je obrazem bodu P v osové souměrnosti podle přímky určené body A, B a bod P'' je obrazem bodu P v osové souměrnosti podle přímky určené body A, C. Protože $|PQ| = |P''Q|$ a $|PR| = |P'R|$, má obvod o stejnou délku jako lomená čára $P'RQP''$. Při pevně zvoleném P bude obvod o nejkratší právě tehdy, když bod R je průsečíkem přímek AB a $P'P''$ a bod Q je průsečíkem přímek AC a $P'P''$. Protože $|AP'| = |AP| = |AP''|$ a $|\sphericalangle P'AP''| = 2\alpha$ (úsečka AP rozdělí úhel α na dvě části, dvojnásobek každé části je pak úhlem při vrcholu A v rovnoramenných trojúhelnících $P'AP$ a PAP''), platí, že $o = |P'P''| = 2|AP| \sin\alpha$ (tento vztah je odvozen z rovnoramenného trojúhelníku $P'AP''$). Poslední výraz bude minimální právě tehdy, když přímky určené body A, P a B, C na sebe budou kolmé. Analogicky se postupuje u bodů Q, R. Hledané body P, Q, R jsou tudíž paty výšek trojúhelníku ABC.

Příklad 5 (Tartagliova[2] úloha).
Rozložte číslo osm na dvě čísla tak, aby jejich součin vynásobený velikostí jejich rozdílu byl maximální.

Řešení. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $x \leq y$. Podle zadání platí:

$$x + y = 8,$$

tedy

$$y = 8 - x.$$

Hledáme tedy maximum funkce

$$f(x) = x(8 - x)(8 - 2x)$$

[1]**Giulio Cesare Fagnano di Toschi** (1682–1766) (čti faňáno) — italský matematik a filozof, zabýval se teorií pravděpodobnosti, algebrou a geometrií trojúhelníku.

[2]**Niccolo Tartaglia** (1500–1557) (čti tartalija) — italský matematik a fyzik, zabýval se mechanikou, balistikou, topografií. Odvodil vzorec pro kubickou rovnici.

při podmínce $0 \leq x \leq 4$. Podle Weierstrassovy věty[1] (např. [6]) řešení existuje. Z nutné podmínky pro extrém $f'(x_0) = 0$ určíme stacionární body

$$3x^2 - 24x + 32 = 0,$$
$$x_0 = 4 \pm \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Jedno z čísel je tedy rovno $4 + 4/\sqrt{3}$ a druhé $4 - 4/\sqrt{3}$.

Příklad 6 (Steinerova úloha)**.**
Nalezněte takový bod v rovině, pro který je součet jeho vzdáleností od vrcholů daného trojúhelníku nejmenší. (Touto úlohou se zabývalo mnoho matematiků v 17. století — Cavalieri[2], Viviani[3], Torricelli[4], Fermat[5] aj. V 19. století tuto úlohu vyřešil J. Steiner, a proto po něm dostala jméno. Později se začaly podobné úlohy objevovat při stavbě silnic, ropovodů a městských komunikací.)

Řešení. Elegantní řešení této geometrické úlohy v případě, že daný trojúhelník je ostroúhlý, lze nalézt v [1].

Příklad 7. Najděte pravoúhlý trojúhelník o maximálním obsahu tak, aby se součet jeho odvěsen rovnal danému číslu. (Tuto úlohu použil v roce 1638 Fermat k ilustraci své metody nalezení minima.)

Řešení. Pro obsah pravoúhlého trojúhelníku platí: $S = ab/2$, kde a, b jsou jeho odvěsny. Podle zadání má dále platit $a + b = x$, kde x je dané kladné reálné číslo. Hledáme tedy maximum funkce $S(a) = a(x - a)/2$ na intervalu $a \in (0, x)$.
[Řešením bude pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník.]

Literatura

[1] V. M. Aleksejev, V. M. Tichomirov, S. V. Fomin. *Matematická teorie optimálních procesů.* Academia, Praha, 1991.

[2] F. Balada. *Z dějin elementární matematiky.* SPN, Praha, 1959.

[3] A. N. Bogoljubov. *Matěmatiki mechaniki.* Naukova dumka, Kyjev, 1983.

[4] Z. Došlá, J. Kuben. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.* Masarykova univerzita, Brno, 2003.

[5] M. Hejný a kol. *Teória vyučovania matematiky 2.* Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1990.

[6] J. Kuben. *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* Vojenská akademie, Brno, 2001.

[7] K. Rektorys. *Co je a k čemu je vyšší matematika.* Academia, Praha, 2001.

[8] R. Slouka. *Sbírka příkladů z matematiky pro 5.–9. ročník ZŠ a víceletá gymnázia.* FIN, Olomouc, 1994.

[9] R. Wesley a kol. *Matematika pre každého.* Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, Bratislava, 1967.

[1]**Karl Theodor Wilhelm Weierstrass** (1815–1897) (čti vajrštrás) — německý matematik, vybudoval základy matematické analýzy, význam mají zvláště práce z teorie analytických funkcí, variačního počtu, diferenciální geometrie a lineární algebry.

[2]**Francesco Bonaventura Cavalieri** (1598–1647) (čti kavalieri) — italský matematik, jeden ze zakladatelů matematické analýzy, zabýval se teorií logaritmů, trigonometrií a astronomií.

[3]**Vincenzo Viviani** (1622–1703) — italský matematik a fyzik, zabýval se geometrií, úlohami na maxima a minima.

[4]**Evangelista Torricelli** (1608–1647) (čti toričeli) — italský fyzik a matematik, formuloval větu o záměně operací integrování a derivování.

[5]**Pierre Fermat** (1601–1655) — francouzský matematik a právník, zabýval se teorií čísel, analýzou a analytickou geometrií.