Vektorová pole na sférách

Marie Provazníková
Mendelova zemědělská a lesnická univerzita v Brně, Fakulta lesnická a dřevařská
e-mail: provazni@mendelu.cz

1 Úvod

Definice. *Tečné vektorové pole* na sféře S^n je zobrazení, které každému bodu $x \in S^n$ přiřadí vektor $v \in T_x S^n$, a to hladkým způsobem.

Existence: S^n, n sudé: neexistuje všude nenulové vektorové pole
S^n, n liché: existuje alespoň jedno všude nenulové vektorové pole:

$$x \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{2k}$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}) \longmapsto v = (-x_2, x_1, -x_3, x_4, \dots, -x_{2k}, x_{2k-1})$$

2 Počet vektorových polí na sféře lichého řádu

Uvažujme sféru $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, kde n je liché, a rozložme číslo $n+1$ následujícím způsobem:

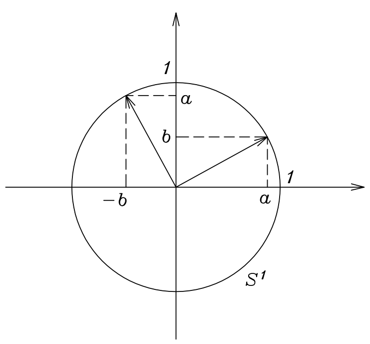
$$n + 1 = 2^{c_{n+1}} 16^{d_{n+1}} m,$$

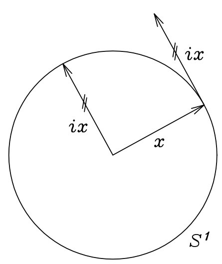
kde $0 \leq c_{n+1} \leq 3$ a m je liché. Potom maximální počet lineárně nezávislých tečných vektorových polí na S^n je

$$\rho(n) = 2^{c_{n+1}} + 8d_{n+1} - 1.$$

3 Vektorová pole na sférách S^1, S^3, S^7

$S^1 \subset \mathbb{C}$:





$x = a + b\mathbf{i}$
$\mathbf{i}x = \mathbf{i}(a + b\mathbf{i}) = -b + a\mathbf{i}$

Vektorové je zobrazení $x \in S^1 \longmapsto$ vektor $\mathbf{i}x$.

Můžeme definovat skalární součin na $\mathbb{C}$ takto: $(x, y) = \frac{1}{2}(x\overline{y} + y\overline{x}),\ x, y \in \mathbb{C}$

Pak $(\mathbf{i}x, x) = \frac{1}{2}\left((\mathbf{i}x)\,\overline{x} + x\left(\overline{\mathbf{i}x}\right)\right) = \frac{1}{2}\,(\mathbf{i}x)\,\overline{x} + x\,(-\mathbf{i})\,\overline{x} = 0.$

$S^3 \subset \mathbb{H}:$

$$\begin{aligned} x \in S^3 &\longmapsto \text{vektor } \mathbf{i}x \\ &\longmapsto \text{vektor } \mathbf{j}x \\ &\longmapsto \text{vektor } \mathbf{k}x \end{aligned}$$

Skalární součin definujeme stejným způsobem. Dá se snadno ukázat, že:

$$(\mathbf{i}x, x) = 0, \quad (\mathbf{j}x, x) = 0, \quad (\mathbf{k}x, x) = 0$$

Uvedená vektorová pole jsou navíc lineárně nezávislá, neboť platí:

$$(\mathbf{i}x, \mathbf{j}x) = 0, \quad (\mathbf{i}x, \mathbf{k}x) = 0, \quad (\mathbf{j}x, \mathbf{k}x) = 0$$

$S^7 \subset \mathbb{O}:$

$$\begin{aligned} x \in S^7 &\longmapsto \text{vektor } \mathbf{e_1}x \\ &\longmapsto \text{vektor } \mathbf{e_2}x \\ &\qquad\vdots \\ &\longmapsto \text{vektor } \mathbf{e_7}x \end{aligned}$$

Skalární součin definujeme stejným způsobem. Také se opět dá ukázat, že

$$(\mathbf{e_1}x, x) = 0, \ldots, (\mathbf{e_7}x, x) = 0,$$

a také skutečnost, že tato vektorová pole jsou lineárně nezávislá.

Reference

[1] John C. Baez. The Octonions. *Bulletin of the American Mathematical Society.* **39**: 145-205, 2002.

[2] John H. Conway, Derek A Smith. *On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry.* A K Peters, Natick, Massachusetts (Canada), 2003. ISBN 1-56881-134-9.

[3] Jiří Vanžura. Osobní sdělení. 26. 7. 2005