

# Diferenciální rovnice v navazujícím magisterském studiu na FEKT VUT

Jaromír Baštinec

*Ústav matematiky, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií,  
VUT Brno, Technická 8, 602 00 Brno, Česká republika*

*e-mail: [bastinec@feec.vutbr.cz](mailto:bastinec@feec.vutbr.cz)*

Josef Diblík

*Ústav matematiky a deskriptivní geometrie, Fakulta stavební,  
VUT Brno, Žižkova 17, 602 00 Brno, Česká republika*

*e-mail: [diblik@feec.vutbr.cz](mailto:diblik@feec.vutbr.cz)*

## Abstrakt

Príspevek se zabývá přípravou předmětu „*Diferenciální rovnice a jejich použití v elektrotechnice*“, který je nově zařazen v navazujícím magisterském studijním programu na FEKT VUT v Brně. Předmět je věnován některým okruhům z teorie diferenciálních rovnic a to jak obyčejných, tak i parciálních, které nebyly v bakalářském studiu probírány, ale které se často vyskytují v technických aplikacích.

**Keywords** Elektrotechnika, diferenciální rovnice, vlastnosti řešení, aplikace.

## 1 Úvod

V roce 2005 bylo zahájeno na Fakultě elektrotechniky a komunikačních technologií (FEKT) VUT v Brně navazující magisterské studium. Jde o další stupeň v reformě vysokoškolského studia, v souladu s boloňskou deklarací ministrů školství zemí EU, o přechodu na dvoustupňový systém vysokoškolského studia.

Mezi magisterské kurzy byly zařazeny i čtyři matematické předměty (podrobnosti viz [7]). Budeme se nyní věnovat jednomu z nich, který se jmenuje „*Diferenciální rovnice a jejich použití v elektrotechnice*“, ve zkratce MDRE.

Na základě předchozích zkušeností a podle předběžných požadavků finálních ústavů předpokládáme, že mezi studenty bude právě o tento předmět největší zájem.

## 2 Výchozí podmínky

Základní kurz matematiky v bakalářském studiu na FEKT VUT je rozdělen do tří navazujících semestrálních kurzů, nazvaných BMA1, BMA2 a BMA3. Protože je v nich nutné provést průřez celou matematikou (tj. lineární algebra, diferenciální a integrální počet jedné i více proměnných, diferenciální rovnice,

integrální transformace, numerické metody, pravděpodobnost a statistika), není možné věnovat se podrobněji jednotlivým tématům. Ty jsou zde pouze uvedeny a stučně procvičeny. Důraz se klade především na zvládnutí a pochopení základních pojmů a osvojení si nezbytných dovedností a postupů pro řešení typových úloh.

Proto v bakalářském studiu zazněly pouze základní pojmy z teorie obyčejných diferenciálních rovnic, navíc ve velmi omezeném rozsahu. Ve druhém semestru bakalářského studia v předmětu BMA2 jsou první tři přednášky věnovány diferenciálním rovnicím. Probírají se:

1. *Obyčejné diferenciální rovnice, základní pojmy a některé analytické metody.*
2. *Soustavy lineárních diferenciálních rovnic, metoda variace konstanty.*
3. *Soustavy s konstantními koeficienty, fundamentální řešení.*

V numerických cvičeních se procvičí:

1. *Metoda separace proměnných, lineární, exaktní a homogenní rovnice.*
2. *Soustavy s konstantními koeficienty.*

V počítačových cvičeních se probírá:

1. *Řešení diferenciálních rovnic (za pomoci vhodného programového vybavení).*
2. *Směrové pole, izokliny.*

Pro nedostatek času byl další materiál přesunut až do navazujícího magisterského studia

### 3 Magisterské studium

Ústavu matematiky se podařilo dosáhnout toho, že do navazujícího magisterského studijního programu byly diferenciální rovnice zařazeny jako samostatný předmět. Jeho rozsah je 3 hodiny přednášek týdně a 2 hodiny počítačového cvičení každých 14 dní.

Diferenciální rovnice jsou základním matematickým aparátem při popisu mnoha oblastí technických věd. Cílem navrženého kursu MDRE je vytvořit u studentů základní představy o vlastnostech řešení diferenciálních rovnic, vysvětlit některé základní techniky a metody jejich řešení. Úkolem kursu je nejenom seznámit s některými přesnými metodami řešení diferenciálních rovnic, ale také ukázat na možnosti získání přibližných informací o vlastnostech jejich řešení. Jednotlivé metody jsou ilustrovány na mnoha příkladech, přitom je snaha zařazovat přednostně aplikační úlohy, zvláště z elektrotechniky.

Schválená osnova předmětu (kterou uvádíme pro čtenáře, kteří nemají přístup na Intranet FEKT VUT) je následující:

1. *Typické vlastnosti řešení diferenciálních rovnic (geometrický význam, pojem počáteční úlohy, jednoznačnost řešení, singulární body). Základní dva typy rovnic (separovatelné a lineární).*
2. *Exaktní rovnice. Integrační faktor. Bernoulliova rovnice. Riccatiova rovnice. Clairoutova rovnice. Linearizace rovnic. Picardovy postupné aproximace.*
3. *Lineární systémy obyčejných diferenciálních rovnic. Struktura jejich řešení. Exponenciála matice a její výpočet. Maticové řešení (pomocí exponenciály matice) lineárních systémů s konstantními koeficienty.*
4. *Vektorový tvar partikulárního řešení (získaný metodou variace konstant). Diskuse a klasifikace řešení rovinného systému rovnic s konstantními koeficienty. Zápis obecného řešení. Systémy s konstantními koeficienty. Řešení pomocí exponenciály matice a Weyrovou metodou.*
5. *Rovnice vyšších řádů. Struktura řešení lineárních rovnic vyšších řádů. Využití diferenciálních rovnic (elektrotechnické aplikace, rovnice druhého řádu, oscilace, rezonance, tlumení, přechodné jevy).*
6. *Formulace počáteční úlohy pro rovnici vyššího řádu. Existence řešení. Rovnice Van der Poolova. Lineární rovnice. Řešení lineárních rovnic druhého řádu pomocí mocninných řad.*
7. *Besselova rovnice a Besselovy funkce, Legendreova rovnice a Legendreovy funkce. Autonomní systémy. Diskuse rovinného lineárního autonomního systému.*
8. *Parciální diferenciální rovnice prvního řádu. Formulace počáteční úlohy. Charakteristický systém. Existence řešení. Obecné řešení.*
9. *Metoda řešení některých typů parciálních rovnic prvního řádu. První integrály. Geometrický význam integrálů. Pfaffova rovnice.*
10. *Parciální diferenciální rovnice druhého řádu. Klasifikace rovnic (hyperbolické, parabolické, eliptické). Transformace proměnných.*
11. *Geometrická představa řešení. Základní (kanonické) tvary diferenciálních rovnic druhého řádu. Charakteristiky.*
12. *Řešení některých rovnic druhého řádu pomocí metody separace a Fourierovy metody (Laplaceova rovnice, rovnice vedení tepla).*
13. *Vlnová rovnice a D'Alembertova metoda jejího řešení. Telegrafní rovnice.*

Ilustrace pojmů a metod se předpokládá pomocí moderního matematického software. Přednášky budou doplňovat počítačová cvičení. Témata jednotlivých cvičení jsou:

1. *Obyčejné a parciální diferenciální rovnice.*
2. *Směrová pole diferenciálních rovnic.*
3. *Přibližné řešení rovnic prvního řádu a vyšších řádů.*
4. *Van der Poolova rovnice.*
5. *Přesná řešení rovnic prvního řádu.*
6. *Přesná řešení rovnic vyšších řádů.*
7. *Řešení ve tvaru nekonečných řad.*
8. *Besselova rovnice, Besselovy funkce, Legendreova rovnice, Legendreovy funkce.*
9. *Diskuse předností a slabín matematického software.*
10. *Fázové trajektorie dvourozměrného dynamického systému.*
11. *Řešení vícerozměrného lineárního systému s konstantními koeficienty.*
12. *Parciální rovnice prvního řádu.*
13. *Softwarové řešení základních typů parciálních rovnic druhého řádu.*

Navrhovatelé předmětu předpokládají, že studenti získají schopnost orientace v základních pojmech a v metodách řešení diferenciálních rovnic a že budou umět řešit technické úlohy pomocí aplikací těchto metod. Řešení úloh se předpokládá i s využitím matematického programového vybavení. Studenti ale musí zvládnout podmínky, kdy je možné kterou metodu použít. V technických oborech se většinou mlčky předpokládá existence řešení a jeho jednoznačnost. Současný matematický software podmínky existence a jednoznačnosti řešení neprověřuje. Prověрку musí provést uživatel mimo běh vlastního programu. Nebo přesněji - *měl by udělat*. Při počítačovém řešení vždy hrozí, že obdržíme *nějaký* výsledek (tj. řešení), který se ale může značně lišit od skutečného, pokud jsme si předem neověřili splnitelnost předepsaných podmínek (existence řešení, konvergence řady, atd.).

Navržený obsah kurzu je značně rozsáhlý a přitom obsahuje pouze základy teorie diferenciálních rovnic, které jsou nutné pro zvládnutí technických předmětů magisterského studia.

## 4 Problémy

Veškerá příprava výuky, včetně přípravy všech materiálů pro ni, byla do značné míry prací na slepo. Dopředu nebylo odhadnutelné, kolik bude mít fakulta v daném ročníku posluchačů, kolik si jich daný předmět zvolí a jaká bude úroveň jejich matematických znalostí. Víme, že většina z nich neměla celý předchozí rok

žádný matematický předmět, ale nevíme ani nejsme schopni dostatečně kvalifikovaně odhadnout jaká bude rychlost zapomínání dříve nabytých poznatků.

Ukázalo se, že průchodnost bakalářského studia je mnohem menší, než se předpokládalo.

Do navazujícího magisterského studia nastupuje asi 380 studentů Pro fakultu je to návrat o 14 let zpět. Tehdy jsme přijímali na celou elektrotechnickou fakultu (včetně informatiky) asi 750 studentů. Jedna třetina studentů odpadla během prvních dvou let studia. Do třetího ročníku (tam začínala specializace a studenty přebíraly finální ústavy) nastupovalo kolem 500 studentů. Katedra počítačů (později ústav informatiky) měla v ročníku asi 120 studentů - počet byl předem stanoven počtem míst v laboratořích. Na zbývající elektrotechnické ústavy připadalo asi 380 studentů. Od 1.1.2001 se ústav informatiky přetransformoval na fakultu informačních technologií a osamostatnil se.

Počet studentů přijímaných na FEKT postupně narůstá a do prvního ročníku bakalářského studijního programu bylo před třemi lety přijato skoro 1000 studentů. Po třech letech studia jich ale splnilo podmínky (= získali dostatečný počet kreditů) pro připuštění k bakalářské zkoušce, jen něco málo přes jednu třetinu. Proto jsme se vrátili o tolik let zpět v počtu studentů, kteří se budou snažit stát se inženýry.

Různé části teorie diferenciálních rovnic a vlastnosti jejich řešení se dají názorně ukázat na náčrtcích, tj. geometricky. Při snaze o to, aby posluchači látky porozuměli hlouběji narážíme na velké neznalosti studentů v geometrii. Viz [9], [10], [12]. Důvodem je postupné omezování rozsahu výuky geometrie na všech stupních škol.

Problémy většinou nevznikají pokud budeme pracovat pouze s obyčejnou diferenciální rovnicí typu  $y' = f(y)$  v prostoru  $\mathbb{R}^2$ . Ty nastávají při studiu soustav rovnic - v prostorech vyšší dimenze a u parciálních diferenciálních rovnic.

Výuka geometrie na FEKT byla prakticky redukována na připomenutí lineárních útvarů (přímka, rovina) a na kanonické tvary kuželoseček a kvadrik, takže nemůžeme na základě těchto znalostí ilustrovat geometrické vlastnosti řešení diferenciálních rovnic. Proto byly z kurzu MDRE vynechány geometrické vlastnosti prvních integrálů a na minimum musel být omezen výklad geometrických vlastností parciálních diferenciálních rovnic.

Při přípravě kurzu jsme byli nuceni vynechat některé zajímavé oblasti. Jde například o obecnou nelineární rovnici, soustavy nelineárních rovnic a nebo o rovnice s nespojitou pravou stranou. Jde o materiál, který má velmi časté aplikace, ale z časových důvodů jej nebylo možné zařadit. Pro to by bylo nutné zvýšit počet hodin výuky předmětu.

## 5 Závěr

Jak je zvykem na FEKT VUT, příprava každého nového předmětu obsahuje také zpracování odpovídajícího elektronického učebního textu. Ten je průběžně připravován a v současné době je k dispozici asi 150 stran textu. Elektronický učební text bude přístupný na fakultní počítačové síti.

Na základě našich zkušeností s průběžným vyhodnocováním studijních výsledků v bakalářském studiu a podle dotazů, se kterými se na nás obracují studenti při přípravě bakalářských prací, musíme očekávat, že nastanou i další potíže. Velké rezervy mají posluchači při algebraických úpravách výrazů, chabé jsou často vědomosti o základních integračních metodách. Nedostatek času, věnovaného počítání příkladů, vede k tomu, že studentům chybí cit pro zvolení vhodných metod při jejich řešení.

Na předmět MDRE bude navazovat předmět Moderní numerické metody, kde se zájemci dovědí o některých metodách numerického řešení diferenciálních rovnic a jejich soustav.

## Poděkování.

Autoři jsou podporováni projektem FRVŠ 2717(2005).

## Reference

- [1] J. Baštinec: *Změny ve znalostech středoškolské matematiky u studentů FEI VUT*. XVI. vědecké kolokvium o řízení osvojovacího procesu. Sborník příspěvků I., Vyškov 1998, 55–59.
- [2] J. Baštinec: *O schopnosti studovat u studentů FEI VUT*. XVII. vědecké kolokvium o řízení osvojovacího procesu. Sborník příspěvků I., Vyškov 1999, 10–13. ISBN 80-7231-035-6.
- [3] J. Baštinec: *Příprava nových učebních plánů na FEI VUT*. XIX. mezinárodní kolokvium o řízení osvojovacího procesu. Sborník příspěvků I., Vyškov 2000, 21–24. ISBN 80-7231-079-2.
- [4] J. Baštinec: *O využívání lidského potenciálu*. Lidský kapitál a investice do vzdělávání. Sborník příspěvků z 5. ročníku mezinárodní konference, Praha 2002, 112–115. ISBN 80-238-9734-9.
- [5] J. Baštinec: *Matematika pro sériové bakaláře na FEKT VUT*. 3. konference o matematice a fyzice na vysokých školách technických s mezinárodní účastí. Sborník příspěvků. Brno 2003, 31–36. ISBN 80-85960-51-6.
- [6] J. Baštinec: *Nedostatky v matematické přípravě absolventů středních škol z pohledu učitele VUT*. DIDZA, Didactic Conference in Žilina with international participation. Žilina, Slovensko: Faculty of Science, University of Žilina, 2004, 15–22. ISBN 80-8070-270-5.
- [7] J. Baštinec, J. Diblík: *Výuka matematiky v magisterském studiu na FEKT VUT XXIII*. International colloquium on the Acquisition Process Management, UO Brno, 2005, Proceedings of abstracts and electronic version of contribution on CD-ROM, 1–5. ISBN 80-85960-92-3.

- [8] J. Bařtinec, J. Diblík: *Předmět “Diferenciální rovnice a jejich použití v elektrotechnice”* 4. konference o matematice a fyzice na vysokých školách technických s mezinárodní účastí. Sborník příspěvků, Brno 2005, 23–28. ISBN 80-85960-91-5.
- [9] M. Novák: *Teaching Geometry at the University of Coimbra*. The 1st International Conference on Applied Mathematics and Informatics at Universities 2001. Gabčíkovo, Slovak Republic: MTF STU Trnava, 2001, 357–363. ISBN 80-227-1568-9.
- [10] M. Novák: *Analytická geometrie na technických vysokých školách (v minulosti a dnes)*. XXII. mezinárodní kolokvium o řízení osvojovacího procesu (CD-ROM). Vyškov: VVŠ PV ve Vyškově, FEM, 2004, 1–5. ISBN 80-7231-116-6.
- [11] M. Novák: *History of the concept of vector space in university teaching of analytic geometry*. 3. matematický workshop: sborník příspěvků (CD-ROM). Brno, FAST VUT, 2004, 1–4. ISBN 80-214-2741-8.
- [12] M. Novák: *On Problems of Computer Aided Teaching of Mathematics at Technical Universities*. XXIII International Colloquium on the Acquisition Process Management. Proceedings of electronic versions of contributions. Brno, University of Defence, Faculty of Economics and Management, 2005, 1–5. ISBN 80-85960-92-3.
- [13] M. Novák: *Některé chyby při studentském řešení jedné úlohy z analytické geometrie*. XVIII. Mezinárodní kolokvium o řízení osvojovacího procesu. Sborník příspěvků. Vyškov na Moravě: Vojenská vysoká škola pozemního vojska Vyškov, 2000, 225–229. ISBN 80-7231-059-3.