Vztahy mezi goniometrickými funkcemi, úpravy goniometrických výrazů.

Budeme používat následující vzorce:

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cos x_2 \pm \cos x_1 \sin x_2 \quad (1)$$

$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cos x_2 \mp \sin x_1 \sin x_2 \quad (2)$$

$$\operatorname{tg}(x_1 \pm x_2) = \frac{\operatorname{tg} x_1 \pm \operatorname{tg} x_2}{1 \mp \operatorname{tg} x_1 \cdot \operatorname{tg} x_2} \quad (3)$$

$$\operatorname{cotg}(x_1 \pm x_2) = \frac{\operatorname{cotg} x_1 \cdot \operatorname{cotg} x_2 \mp 1}{\operatorname{cotg} x_2 \pm \operatorname{cotg} x_1} \quad (4)$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad (5)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad (6)$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad (7)$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad (8)$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}. \quad (9)$$

Příklad: *Řešte úlohy:*

1) Určete hodnotu výrazu $V = \sin x \cdot \cos x$, jestliže $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$;
2) Dokažte, že pro přípustné x platí

$$\left(1 - \frac{\cos x}{1+\cos x} - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{\cos 2x - 1}{2\cos^2 x} = \cos x - 1;$$

3) Dokažte, že pro přípustné x platí

$$\frac{\sin^2(\frac{3}{2}\pi + x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{\pi}{2})} + \frac{\sin^2(-x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{3}{2}\pi)} = \operatorname{cotg}^2 x.$$

Příklad: *Řešte úlohy:*

1) Určete hodnotu výrazu $V = \sin x \cdot \cos x$, jestliže $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$;
2) Dokažte, že pro přípustné x platí

$$\left(1 - \frac{\cos x}{1 + \cos x} - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{\cos 2x - 1}{2\cos^2 x} = \cos x - 1;$$

3) Dokažte, že pro přípustné x platí

$$\frac{\sin^2(\frac{3}{2}\pi + x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{\pi}{2})} + \frac{\sin^2(-x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{3}{2}\pi)} = \operatorname{cotg}^2 x.$$

Řešení:

1) Umocněním rovnice $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ dostaneme

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1/4.$$

Příklad: *Řešte úlohy:*

1) Určete hodnotu výrazu $V = \sin x \cdot \cos x$, jestliže $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$;

2) Dokažte, že pro přípustné x platí

$$\left(1 - \frac{\cos x}{1 + \cos x} - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{\cos 2x - 1}{2\cos^2 x} = \cos x - 1;$$

3) Dokažte, že pro přípustné x platí

$$\frac{\sin^2(\frac{3}{2}\pi + x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{\pi}{2})} + \frac{\sin^2(-x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{3}{2}\pi)} = \operatorname{cotg}^2 x.$$

Řešení:

1) Umocněním rovnice $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ dostaneme

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1/4.$$

Odtud plyne (s použitím vzorce **(7)**), že $2V + 1 = 1/4$,

Příklad: *Řešte úlohy:*

1) Určete hodnotu výrazu $V = \sin x \cdot \cos x$, jestliže $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$;
2) Dokažte, že pro přípustné x platí

$$\left(1 - \frac{\cos x}{1 + \cos x} - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{\cos 2x - 1}{2\cos^2 x} = \cos x - 1;$$

3) Dokažte, že pro přípustné x platí

$$\frac{\sin^2(\frac{3}{2}\pi + x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{\pi}{2})} + \frac{\sin^2(-x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{3}{2}\pi)} = \operatorname{cotg}^2 x.$$

Řešení:

1) Umocněním rovnice $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ dostaneme

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1/4.$$

Odtud plyne (s použitím vzorce **(7)**), že $2V + 1 = 1/4$, tedy $V = \sin x \cos x = -3/8$.

2) Máme ukázat, že pro přípustné x platí

$$\left(1-\frac{\cos x}{1+\cos x}-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{\cos 2x-1}{2\cos^2 x}=\cos x-1.$$

2) Máme ukázat, že pro přípustné x platí

$$\left(1-\frac{\cos x}{1+\cos x}-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{\cos 2x-1}{2\cos^2 x}=\cos x-1.$$

Úpravou levé strany rovnice dostáváme

$$\left(1-\frac{\cos x}{1+\cos x}-1+\cos x\right)\cdot\frac{-2\sin^2 x}{2\cos^2 x} \quad =$$

2) Máme ukázat, že pro přípustné x platí

$$\left(1-\frac{\cos x}{1+\cos x}-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{\cos 2x-1}{2\cos^2 x}=\cos x-1.$$

Úpravou levé strany rovnice dostáváme

$$\left(1-\frac{\cos x}{1+\cos x}-1+\cos x\right)\cdot\frac{-2\sin^2 x}{2\cos^2 x} = \frac{1+\cos x-\cos x-(1-\cos^2 x)}{1+\cos x}\cdot\frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x}=$$

$$=$$

2) Máme ukázat, že pro přípustné x platí

$$\left(1 - \frac{\cos x}{1+\cos x} - 2\sin^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{\cos 2x - 1}{2\cos^2 x} = \cos x - 1.$$

Úpravou levé strany rovnice dostáváme

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{\cos x}{1+\cos x} - 1 + \cos x\right)\cdot\frac{-2\sin^2 x}{2\cos^2 x} &= \frac{1+\cos x - \cos x - (1-\cos^2 x)}{1+\cos x}\cdot\frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= -\frac{\cos^2 x}{1+\cos x}\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= \end{aligned}$$

2) Máme ukázat, že pro přípustné x platí

$$\left(1-\frac{\cos x}{1+\cos x}-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{\cos 2x-1}{2\cos^2 x}=\cos x-1.$$

Úpravou levé strany rovnice dostáváme

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{\cos x}{1+\cos x}-1+\cos x\right)\cdot\frac{-2\sin^2 x}{2\cos^2 x} &= \frac{1+\cos x-\cos x-(1-\cos^2 x)}{1+\cos x}\cdot\frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x}= \\ &= -\frac{\cos^2 x}{1+\cos x}\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}= \\ &= \frac{\cos^2 x-1}{\cos x+1}= \\ &= \end{aligned}$$

2) Máme ukázat, že pro přípustné x platí

$$\left(1-\frac{\cos x}{1+\cos x}-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{\cos 2x-1}{2\cos^2 x}=\cos x-1.$$

Úpravou levé strany rovnice dostáváme

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{\cos x}{1+\cos x}-1+\cos x\right)\cdot\frac{-2\sin^2 x}{2\cos^2 x} &= \frac{1+\cos x-\cos x-(1-\cos^2 x)}{1+\cos x}\cdot\frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x}= \\
&= -\frac{\cos^2 x}{1+\cos x}\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}= \\
&= \frac{\cos^2 x-1}{\cos x+1}= \\
&= \cos x-1.
\end{aligned}$$

3) Máme ukázat, že pro přípustné x platí

$$\frac{\sin^2(\frac{3}{2}\pi + x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{\pi}{2})} + \frac{\sin^2(-x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{3}{2}\pi)} = \operatorname{cotg}^2 x.$$

3) Máme ukázat, že pro přípustné x platí

$$\frac{\sin^2(\frac{3}{2}\pi + x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{\pi}{2})} + \frac{\sin^2(-x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{3}{2}\pi)} = \operatorname{cotg}^2 x.$$

Opět postupně upravujeme levou stranu rovnice užitím známých vztahů pro goniometrické funkce

$$\frac{\sin^2(\frac{3}{2}\pi + x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{\pi}{2})} + \frac{\sin^2(-x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{3}{2}\pi)} \quad =$$

3) Máme ukázat, že pro přípustné x platí

$$\frac{\sin^2(\frac{3}{2}\pi + x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{\pi}{2})} + \frac{\sin^2(-x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{3}{2}\pi)} = \operatorname{cotg}^2 x.$$

Opět postupně upravujeme levou stranu rovnice užitím známých vztahů pro goniometrické funkce

$$\frac{\sin^2(\frac{3}{2}\pi + x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{\pi}{2})} + \frac{\sin^2(-x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{3}{2}\pi)} = \frac{\Big((\sin\frac{3}{2}\pi)\cdot\cos x + (\cos\frac{3}{2}\pi)\cdot\sin x\Big)^2}{\left(\frac{1 + (\operatorname{cotg} x)\cdot\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} - \operatorname{cotg} x}\right)^2} + \frac{\sin^2 x}{\left(\frac{(\operatorname{cotg} x)\cdot\operatorname{cotg}\frac{3}{2}\pi + 1}{\operatorname{cotg}\frac{3}{2}\pi - \operatorname{cotg} x}\right)^2} =$$

$$=$$

3) Máme ukázat, že pro přípustné x platí

$$\frac{\sin^2(\frac{3}{2}\pi + x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{\pi}{2})} + \frac{\sin^2(-x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{3}{2}\pi)} = \operatorname{cotg}^2 x.$$

Opět postupně upravujeme levou stranu rovnice užitím známých vztahů pro goniometrické funkce

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2(\frac{3}{2}\pi + x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{\pi}{2})} + \frac{\sin^2(-x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{3}{2}\pi)} &= \frac{\left((\sin\frac{3}{2}\pi)\cdot\cos x + (\cos\frac{3}{2}\pi)\cdot\sin x\right)^2}{\left(\frac{1 + (\operatorname{cotg} x)\cdot\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} - \operatorname{cotg} x}\right)^2} + \\
&\quad + \frac{\sin^2 x}{\left(\frac{(\operatorname{cotg} x)\cdot\operatorname{cotg}\frac{3}{2}\pi + 1}{\operatorname{cotg}\frac{3}{2}\pi - \operatorname{cotg} x}\right)^2} = \\
&= \frac{(-\cos x)^2}{\left(-\frac{1}{\operatorname{cotg} x}\right)^2} + \frac{\sin^2 x}{\left(-\frac{1}{\operatorname{cotg} x}\right)^2} = \\
&=
\end{aligned}$$

3) Máme ukázat, že pro přípustné x platí

$$\frac{\sin^2(\frac{3}{2}\pi + x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{\pi}{2})} + \frac{\sin^2(-x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{3}{2}\pi)} = \operatorname{cotg}^2 x.$$

Opět postupně upravujeme levou stranu rovnice užitím známých vztahů pro goniometrické funkce

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2(\frac{3}{2}\pi + x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{\pi}{2})} + \frac{\sin^2(-x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{3}{2}\pi)} &= \frac{\left((\sin\frac{3}{2}\pi)\cdot\cos x + (\cos\frac{3}{2}\pi)\cdot\sin x\right)^2}{\left(\frac{1 + (\operatorname{cotg} x)\cdot\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} - \operatorname{cotg} x}\right)^2} + \\
&\quad + \frac{\sin^2 x}{\left(\frac{(\operatorname{cotg} x)\cdot\operatorname{cotg}\frac{3}{2}\pi + 1}{\operatorname{cotg}\frac{3}{2}\pi - \operatorname{cotg} x}\right)^2} = \\
&= \frac{(-\cos x)^2}{\left(-\frac{1}{\operatorname{cotg} x}\right)^2} + \frac{\sin^2 x}{\left(-\frac{1}{\operatorname{cotg} x}\right)^2} = \\
&= \operatorname{cotg}^2 x\cdot(\cos^2 x + \sin^2 x) =
\end{aligned}$$

3) Máme ukázat, že pro přípustné x platí

$$\frac{\sin^2(\frac{3}{2}\pi + x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{\pi}{2})} + \frac{\sin^2(-x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{3}{2}\pi)} = \operatorname{cotg}^2 x.$$

Opět postupně upravujeme levou stranu rovnice užitím známých vztahů pro goniometrické funkce

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2(\frac{3}{2}\pi + x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{\pi}{2})} + \frac{\sin^2(-x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{3}{2}\pi)} &= \frac{\left((\sin\frac{3}{2}\pi)\cdot\cos x + (\cos\frac{3}{2}\pi)\cdot\sin x\right)^2}{\left(\frac{1 + (\operatorname{cotg} x)\cdot\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} - \operatorname{cotg} x}\right)^2} + \\
&\quad + \frac{\sin^2 x}{\left(\frac{(\operatorname{cotg} x)\cdot\operatorname{cotg}\frac{3}{2}\pi + 1}{\operatorname{cotg}\frac{3}{2}\pi - \operatorname{cotg} x}\right)^2} = \\
&= \frac{(-\cos x)^2}{\left(-\frac{1}{\operatorname{cotg} x}\right)^2} + \frac{\sin^2 x}{\left(-\frac{1}{\operatorname{cotg} x}\right)^2} = \\
&= \operatorname{cotg}^2 x\cdot(\cos^2 x + \sin^2 x) = \operatorname{cotg}^2 x.
\end{aligned}$$

3) Máme ukázat, že pro přípustné x platí

$$\frac{\sin^2(\frac{3}{2}\pi + x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{\pi}{2})} + \frac{\sin^2(-x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{3}{2}\pi)} = \operatorname{cotg}^2 x.$$

Opět postupně upravujeme levou stranu rovnice užitím známých vztahů pro goniometrické funkce

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2(\frac{3}{2}\pi + x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{\pi}{2})} + \frac{\sin^2(-x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{3}{2}\pi)} &= \frac{\left((\sin\frac{3}{2}\pi)\cdot\cos x + (\cos\frac{3}{2}\pi)\cdot\sin x\right)^2}{\left(\frac{1 + (\operatorname{cotg} x)\cdot\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} - \operatorname{cotg} x}\right)^2} + \\
&\quad + \frac{\sin^2 x}{\left(\frac{(\operatorname{cotg} x)\cdot\operatorname{cotg}\frac{3}{2}\pi + 1}{\operatorname{cotg}\frac{3}{2}\pi - \operatorname{cotg} x}\right)^2} = \\
&= \frac{(-\cos x)^2}{\left(-\frac{1}{\operatorname{cotg} x}\right)^2} + \frac{\sin^2 x}{\left(-\frac{1}{\operatorname{cotg} x}\right)^2} = \\
&= \operatorname{cotg}^2 x\cdot(\cos^2 x + \sin^2 x) = \operatorname{cotg}^2 x.
\end{aligned}$$

Využili jsme lichost funkce sinus a výše uvedený vztah (4).

Studijní opory pro vyrovnávací kurz z matematiky na FAST VUT vznikly v rámci projektu

Modernizace výuky na Fakultě stavební VUT v Brně v rámci bakalářských a magisterských studijních programů

registrační číslo: CZ.04.1.03/3.2.15.2/0292,

který byl spolufinancován z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu ČR prostřednictvím Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy v rámci operačního programu *Rozvoj lidských zdrojů*, opatření 3.3.

Oficiální definice ESF zní: *ESF napomáhá rozvoji zaměstnanosti podporou zaměstnatelnosti, podnikatelského ducha, rovných příležitostí a investicemi do lidských zdrojů.*