Zapamatujte si:

exponenciální funkce o základu a

$$f(x) = a^x,\ a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$$

Pro všechna $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ platí:

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}, \tag{1}$$

$$a^{x_1-x_2} = \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}}, \tag{2}$$

$$\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}. \tag{3}$$

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(3) řešte rovnice*

1) $3^{x+1} \cdot 9^{x-2} = 27^{3x-2}$;

2) $5^{2x+1} - 5^x = 4$;

3) $-8 \cdot 3^{\sqrt{x-1}} + 9^{\sqrt{x-1}} = 9$.

Poznámky: a) $9^{x-2} = \left(3^2\right)^{x-1} = 3^{2(x-1)}$ atd.; b) $5^{2x+1} = 5^{2x} \cdot 5^1 = 5 \cdot \left(5^x\right)^2$; c) $9^{\sqrt{x-1}} = \left(3^2\right)^{\sqrt{x-1}} = \left(3^{\sqrt{x-1}}\right)^2$.

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(3) řešte rovnice*

1) $3^{x+1} \cdot 9^{x-2} = 27^{3x-2}$;

2) $5^{2x+1} - 5^{x} = 4$;

3) $-8 \cdot 3^{\sqrt{x-1}} + 9^{\sqrt{x-1}} = 9$.

Řešení:

1) Užitím vzorce (3) (viz pozn. a)) rovnici upravíme na tvar $3^{x+1} \cdot 3^{2x-4} = 3^{9x-6}$,

Poznámky: a) $9^{x-2} = \left(3^2\right)^{x-1} = 3^{2(x-1)}$ atd.; b) $5^{2x+1} = 5^{2x} \cdot 5^{1} = 5 \cdot (5^{x})^{2}$; c) $9^{\sqrt{x-1}} = \left(3^2\right)^{\sqrt{x-1}} = \left(3^{\sqrt{x-1}}\right)^{2}$.

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(3) řešte rovnice*

1) $3^{x+1} \cdot 9^{x-2} = 27^{3x-2}$;

2) $5^{2x+1} - 5^{x} = 4$;

3) $-8 \cdot 3^{\sqrt{x-1}} + 9^{\sqrt{x-1}} = 9$.

Řešení:

1) Užitím vzorce (3) (viz pozn. a)) rovnici upravíme na tvar $3^{x+1} \cdot 3^{2x-4} = 3^{9x-6}$, ve kterém budeme mít mocněný stejný základ.

Poznámky: a) $9^{x-2} = \left(3^2\right)^{x-1} = 3^{2(x-1)}$ atd.; b) $5^{2x+1} = 5^{2x} \cdot 5^1 = 5 \cdot \left(5^x\right)^2$; c) $9^{\sqrt{x-1}} = \left(3^2\right)^{\sqrt{x-1}} = \left(3^{\sqrt{x-1}}\right)^2$.

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(3) řešte rovnice*

1) $3^{x+1} \cdot 9^{x-2} = 27^{3x-2}$;

2) $5^{2x+1} - 5^{x} = 4$;

3) $-8 \cdot 3^{\sqrt{x-1}} + 9^{\sqrt{x-1}} = 9$.

Řešení:

1) Užitím vzorce (3) (viz pozn. a)) rovnici upravíme na tvar $3^{x+1} \cdot 3^{2x-4} = 3^{9x-6}$, ve kterém budeme mít mocněný stejný základ. Odtud (užitím (1)) máme $3^{3x-3} = 3^{9x-6}$ a porovnáním exponentů $3x - 3 = 9x - 6$ určíme výsledek $x = 1/2$.

Poznámky: a) $9^{x-2} = \left(3^2\right)^{x-1} = 3^{2(x-1)}$ atd.; b) $5^{2x+1} = 5^{2x} \cdot 5^1 = 5 \cdot \left(5^x\right)^2$; c) $9^{\sqrt{x-1}} = \left(3^2\right)^{\sqrt{x-1}} = \left(3^{\sqrt{x-1}}\right)^2$.

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(3) řešte rovnice*

1) $3^{x+1}\cdot 9^{x-2} = 27^{3x-2}$;

2) $5^{2x+1} - 5^{x} = 4$;

3) $-8\cdot 3^{\sqrt{x-1}} + 9^{\sqrt{x-1}} = 9$.

Řešení:

1) Užitím vzorce (3) (viz pozn. a)) rovnici upravíme na tvar $3^{x+1}\cdot 3^{2x-4} = 3^{9x-6}$, ve kterém budeme mít mocněný stejný základ. Odtud (užitím (1)) máme $3^{3x-3} = 3^{9x-6}$ a porovnáním exponentů $3x-3 = 9x-6$ určíme výsledek $x = 1/2$.
2) Zavedením substituce $5^{x} = u$ (s použitím vzorců (1) a (3) – viz pozn. b)) převedeme rovnici na tvar

Poznámky: a) $9^{x-2} = \left(3^{2}\right)^{x-1} = 3^{2(x-1)}$ atd.; b) $5^{2x+1} = 5^{2x}\cdot 5^{1} = 5\cdot\left(5^{x}\right)^{2}$; c) $9^{\sqrt{x-1}} = \left(3^{2}\right)^{\sqrt{x-1}} = \left(3^{\sqrt{x-1}}\right)^{2}$.

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(3) řešte rovnice*

1) $3^{x+1} \cdot 9^{x-2} = 27^{3x-2}$;

2) $5^{2x+1} - 5^{x} = 4$;

3) $-8 \cdot 3^{\sqrt{x-1}} + 9^{\sqrt{x-1}} = 9$.

Řešení:

1) Užitím vzorce (3) (viz pozn. a)) rovnici upravíme na tvar $3^{x+1} \cdot 3^{2x-4} = 3^{9x-6}$, ve kterém budeme mít mocněný stejný základ. Odtud (užitím (1)) máme $3^{3x-3} = 3^{9x-6}$ a porovnáním exponentů $3x - 3 = 9x - 6$ určíme výsledek $x = 1/2$.
2) Zavedením substituce $5^{x} = u$ (s použitím vzorců (1) a (3) – viz pozn. b)) převedeme rovnici na tvar $5u^2 - u - 4 = 0$, která má řešení

Poznámky: a) $9^{x-2} = \left(3^2\right)^{x-1} = 3^{2(x-1)}$ atd.; b) $5^{2x+1} = 5^{2x} \cdot 5^{1} = 5 \cdot \left(5^{x}\right)^{2}$; c) $9^{\sqrt{x-1}} = \left(3^2\right)^{\sqrt{x-1}} = \left(3^{\sqrt{x-1}}\right)^{2}$.

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(3) řešte rovnice*

1) $3^{x+1} \cdot 9^{x-2} = 27^{3x-2}$;

2) $5^{2x+1} - 5^x = 4$;

3) $-8 \cdot 3^{\sqrt{x-1}} + 9^{\sqrt{x-1}} = 9$.

Řešení:

1) Užitím vzorce (3) (viz pozn. a)) rovnici upravíme na tvar $3^{x+1} \cdot 3^{2x-4} = 3^{9x-6}$, ve kterém budeme mít mocněný stejný základ. Odtud (užitím (1)) máme $3^{3x-3} = 3^{9x-6}$ a porovnáním exponentů $3x - 3 = 9x - 6$ určíme výsledek $x = 1/2$.

2) Zavedením substituce $5^x = u$ (s použitím vzorců (1) a (3) – viz pozn. b)) převedeme rovnici na tvar $5u^2 - u - 4 = 0$, která má řešení $u_1 = 1$, $u_2 = -4/5$.

Poznámky: a) $9^{x-2} = \left(3^2\right)^{x-1} = 3^{2(x-1)}$ atd.; b) $5^{2x+1} = 5^{2x} \cdot 5^1 = 5 \cdot \left(5^x\right)^2$; c) $9^{\sqrt{x-1}} = \left(3^2\right)^{\sqrt{x-1}} = \left(3^{\sqrt{x-1}}\right)^2$.

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(3) řešte rovnice*

1) $3^{x+1}\cdot 9^{x-2}=27^{3x-2}$;

2) $5^{2x+1}-5^{x}=4$;

3) $-8\cdot 3^{\sqrt{x-1}}+9^{\sqrt{x-1}}=9$.

Řešení:

1) Užitím vzorce (3) (viz pozn. a)) rovnici upravíme na tvar $3^{x+1}\cdot 3^{2x-4}=3^{9x-6}$, ve kterém budeme mít mocněný stejný základ. Odtud (užitím (1)) máme $3^{3x-3}=3^{9x-6}$ a porovnáním exponentů $3x-3=9x-6$ určíme výsledek $x=1/2$.
2) Zavedením substituce $5^x=u$ (s použitím vzorců (1) a (3) – viz pozn. b)) převedeme rovnici na tvar $5u^2-u-4=0$, která má řešení $u_1=1$, $u_2=-4/5$. Vzhledem k substituci $5^x=u$, vyhovuje pouze $u_1=1$ a odtud $x=0$.

Poznámky: a) $9^{x-2}=\left(3^2\right)^{x-1}=3^{2(x-1)}$ atd.; b) $5^{2x+1}=5^{2x}\cdot 5^1=5\cdot\left(5^x\right)^2$; c) $9^{\sqrt{x-1}}=\left(3^2\right)^{\sqrt{x-1}}=\left(3^{\sqrt{x-1}}\right)^2$.

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(3) řešte rovnice*

1) $3^{x+1} \cdot 9^{x-2} = 27^{3x-2}$;

2) $5^{2x+1} - 5^x = 4$;

3) $-8 \cdot 3^{\sqrt{x-1}} + 9^{\sqrt{x-1}} = 9$.

Řešení:

1) Užitím vzorce (3) (viz pozn. a)) rovnici upravíme na tvar $3^{x+1} \cdot 3^{2x-4} = 3^{9x-6}$, ve kterém budeme mít mocněný stejný základ. Odtud (užitím (1)) máme $3^{3x-3} = 3^{9x-6}$ a porovnáním exponentů $3x - 3 = 9x - 6$ určíme výsledek $x = 1/2$.
2) Zavedením substituce $5^x = u$ (s použitím vzorců (1) a (3) – viz pozn. b)) převedeme rovnici na tvar $5u^2 - u - 4 = 0$, která má řešení $u_1 = 1$, $u_2 = -4/5$. Vzhledem k substituci $5^x = u$, vyhovuje pouze $u_1 = 1$ a odtud $x = 0$.
3) Po substituci $3^{\sqrt{x-1}} = t$ (viz pozn. c)) přejde rovnice na tvar $t^2 - 8t - 9 = 0$

Poznámky: a) $9^{x-2} = \left(3^2\right)^{x-1} = 3^{2(x-1)}$ atd.; b) $5^{2x+1} = 5^{2x} \cdot 5^1 = 5 \cdot \left(5^x\right)^2$; c) $9^{\sqrt{x-1}} = \left(3^2\right)^{\sqrt{x-1}} = \left(3^{\sqrt{x-1}}\right)^2$.

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(3) řešte rovnice*

1) $3^{x+1} \cdot 9^{x-2} = 27^{3x-2}$;

2) $5^{2x+1} - 5^{x} = 4$;

3) $-8 \cdot 3^{\sqrt{x-1}} + 9^{\sqrt{x-1}} = 9$.

Řešení:

1) Užitím vzorce (3) (viz pozn. a)) rovnici upravíme na tvar $3^{x+1} \cdot 3^{2x-4} = 3^{9x-6}$, ve kterém budeme mít mocněný stejný základ. Odtud (užitím (1)) máme $3^{3x-3} = 3^{9x-6}$ a porovnáním exponentů $3x - 3 = 9x - 6$ určíme výsledek $x = 1/2$.
2) Zavedením substituce $5^{x} = u$ (s použitím vzorců (1) a (3) – viz pozn. b)) převedeme rovnici na tvar $5u^{2} - u - 4 = 0$, která má řešení $u_1 = 1$, $u_2 = -4/5$. Vzhledem k substituci $5^{x} = u$, vyhovuje pouze $u_1 = 1$ a odtud $x = 0$.
3) Po substituci $3^{\sqrt{x-1}} = t$ (viz pozn. c)) přejde rovnice na tvar $t^{2} - 8t - 9 = 0$ s řešeními $t_1 = 9$, $t_2 = -1$.

Poznámky: a) $9^{x-2} = \left(3^{2}\right)^{x-1} = 3^{2(x-1)}$ atd.; b) $5^{2x+1} = 5^{2x} \cdot 5^{1} = 5 \cdot \left(5^{x}\right)^{2}$; c) $9^{\sqrt{x-1}} = \left(3^{2}\right)^{\sqrt{x-1}} = \left(3^{\sqrt{x-1}}\right)^{2}$.

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(3) řešte rovnice*

1) $3^{x+1} \cdot 9^{x-2} = 27^{3x-2}$;

2) $5^{2x+1} - 5^{x} = 4$;

3) $-8 \cdot 3^{\sqrt{x-1}} + 9^{\sqrt{x-1}} = 9$.

Řešení:

1) Užitím vzorce (3) (viz pozn. a)) rovnici upravíme na tvar $3^{x+1} \cdot 3^{2x-4} = 3^{9x-6}$, ve kterém budeme mít mocněný stejný základ. Odtud (užitím (1)) máme $3^{3x-3} = 3^{9x-6}$ a porovnáním exponentů $3x - 3 = 9x - 6$ určíme výsledek $x = 1/2$.
2) Zavedením substituce $5^{x} = u$ (s použitím vzorců (1) a (3) – viz pozn. b)) převedeme rovnici na tvar $5u^2 - u - 4 = 0$, která má řešení $u_1 = 1$, $u_2 = -4/5$. Vzhledem k substituci $5^{x} = u$, vyhovuje pouze $u_1 = 1$ a odtud $x = 0$.
3) Po substituci $3^{\sqrt{x-1}} = t$ (viz pozn. c)) přejde rovnice na tvar $t^2 - 8t - 9 = 0$ s řešeními $t_1 = 9$, $t_2 = -1$. Zavedené substituci vyhovuje pouze $t_1 = 9 = 3^2$.

Poznámky: a) $9^{x-2} = \left(3^2\right)^{x-1} = 3^{2(x-1)}$ atd.; b) $5^{2x+1} = 5^{2x} \cdot 5^1 = 5 \cdot \left(5^x\right)^2$; c) $9^{\sqrt{x-1}} = \left(3^2\right)^{\sqrt{x-1}} = \left(3^{\sqrt{x-1}}\right)^2$.

Příklad: *S použitím předchozích vzorců (1)–(3) řešte rovnice*

1) $3^{x+1} \cdot 9^{x-2} = 27^{3x-2}$;

2) $5^{2x+1} - 5^x = 4$;

3) $-8 \cdot 3^{\sqrt{x-1}} + 9^{\sqrt{x-1}} = 9$.

Řešení:

1) Užitím vzorce (3) (viz pozn. a)) rovnici upravíme na tvar $3^{x+1} \cdot 3^{2x-4} = 3^{9x-6}$, ve kterém budeme mít mocněný stejný základ. Odtud (užitím (1)) máme $3^{3x-3} = 3^{9x-6}$ a porovnáním exponentů $3x - 3 = 9x - 6$ určíme výsledek $x = 1/2$.
2) Zavedením substituce $5^x = u$ (s použitím vzorců (1) a (3) – viz pozn. b)) převedeme rovnici na tvar $5u^2 - u - 4 = 0$, která má řešení $u_1 = 1$, $u_2 = -4/5$. Vzhledem k substituci $5^x = u$, vyhovuje pouze $u_1 = 1$ a odtud $x = 0$.
3) Po substituci $3^{\sqrt{x-1}} = t$ (viz pozn. c)) přejde rovnice na tvar $t^2 - 8t - 9 = 0$ s řešeními $t_1 = 9$, $t_2 = -1$. Zavedené substituci vyhovuje pouze $t_1 = 9 = 3^2$. Proto $\sqrt{x-1} = 2$ a odtud $x = 5$.

Poznámky: a) $9^{x-2} = \left(3^2\right)^{x-1} = 3^{2(x-1)}$ atd.; b) $5^{2x+1} = 5^{2x} \cdot 5^1 = 5 \cdot \left(5^x\right)^2$; c) $9^{\sqrt{x-1}} = \left(3^2\right)^{\sqrt{x-1}} = \left(3^{\sqrt{x-1}}\right)^2$.

Studijní opory pro vyrovnávací kurz z matematiky na FAST VUT vznikly v rámci projektu

Modernizace výuky na Fakultě stavební VUT v Brně v rámci bakalářských a magisterských studijních programů

registrační číslo: CZ.04.1.03/3.2.15.2/0292,

který byl spolufinancován z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu ČR prostřednictvím Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy v rámci operačního programu *Rozvoj lidských zdrojů*, opatření 3.3.

Oficiální definice ESF zní: *ESF napomáhá rozvoji zaměstnanosti podporou zaměstnatelnosti, podnikatelského ducha, rovných příležitostí a investicemi do lidských zdrojů.*