Využití vektorového počtu v analytické geometrii

Rovina v $\mathbb{E}_3$

1. Parametrická rovnice roviny: $X = A + t\vec{u} + s\vec{v} \dots t, s \in \mathbb{R}$ jsou parametry, rozepsáno do souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= x_A + tu_1 + sv_1, \\ y &= y_A + tu_2 + sv_2, \\ z &= z_A + tu_3 + sv_3. \end{aligned}$$

2. Obecná rovnice roviny: $ax + by + cz + d = 0$, kde a, b, c, jsou souřadnice normálového vektoru roviny ρ, tj. $\vec{n} = (a, b, c)$.

Přímka v $\mathbb{E}_3$

1. Parametrické rovnice přímky: $X = A + t\vec{u}$, kde $t \in \mathbb{R}$ je parametr. Rozepsáno do souřadnic

$$\begin{aligned} p : x &= x_A + tu_1, \\ y &= y_A + tu_2, \qquad t \in \mathbb{R} \text{ je parametr} \\ z &= z_A + tu_3. \end{aligned}$$

2. Přímka jako průsečnice dvou rovin: směrový vektor $\vec{u}$ přímky je kolineární s vektorem $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

$$p : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} .$$

Vzájemná poloha dvou rovin

Roviny α a β s normálovými vektory $\vec{n}_\alpha$, $\vec{n}_\beta$ jsou:

1. rovnoběžné totožné $\iff$ $\vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta$ a $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$
2. rovnoběžné různé $\iff$ $\vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta$ a $\alpha \cap \beta = \emptyset$

   $\rightarrow$ Určujeme vzdálenost rovin.
3. různoběžné $\iff$ $\vec{n}_\alpha \neq k\vec{n}_\beta$

   $\rightarrow$ Určujeme úhel a průsečnici rovin.

Vzájemná poloha přímky a roviny

Přímka $p = [A; \vec{u}]$ a rovina $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ s normálovým vektorem $\vec{n}$:

1. přímka p leží v rovině α $\iff$ $\vec{u} \perp \vec{n}$ a $p \cap \alpha = p$
2. přímka p je rovnoběžná s rovinou α $\iff$ $\vec{u} \perp \vec{n}$ a $p \cap \alpha = \emptyset$

   $\rightarrow$ Určujeme vzdálenost přímky a roviny.

3. přímka p je různoběžná s rovinou α $\iff$ $\vec{u} \not\perp \vec{n}$

   $\to$ Určujeme úhel a průsečík přímky a roviny.

Vzájemná poloha dvou přímek

Přímky $p = [A; \vec{u}_p]$, $q = [B; \vec{u}_q]$ jsou:

1. rovnoběžné totožné $\iff$ $\vec{u}_p = k\vec{u}_q$ a $p \cap q = p = q$
2. rovnoběžné různé $\iff$ $\vec{u}_p = k\vec{u}_q$ a $p \cap q = \emptyset$

   $\to$ Určujeme vzdálenost rovnoběžek.

3. různoběžné $\iff$ $\vec{u}_p \neq k\vec{u}_q$ a $p \cap q = \{R\}$

   $\to$ Určujeme úhel a průsečík různoběžek.

4. mimoběžné $\iff$ $\vec{u}_p \neq k\vec{u}_q$ a $p \cap q = \emptyset$

   $\to$ Určujeme úhel mimoběžek a jejich nejkratší vzdálenost.

Úlohy metrické

Úhel $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ dvou přímek p, q: je úhlem jejich směrových vektorů $\vec{u}_p$, $\vec{u}_q$:

$$\boldsymbol{\cos\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q|}{\|\vec{u}_p\| \cdot \|\vec{u}_q\|}}$$

Nejkratší vzdálenost mimoběžek $\boldsymbol{p = [A; \vec{u}_p]}$, $\boldsymbol{q = [B; \vec{u}_q]}$ je určena výškou rovnoběžnostěnu sestrojeného nad vektory $\boldsymbol{\vec{u}_p}$, $\boldsymbol{\vec{u}_q}$, $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}$:

$$\boldsymbol{v = \frac{|[\vec{u}_p, \vec{u}_q, \overrightarrow{AB}]|}{\|\vec{u}_p \times \vec{u}_q\|}}$$