BAA003 - MATEMATIKA 3

Hana Boháčková

FAST VUT

2024

Diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice jsou rovnice, které obsahují derivace. V technické praxi se využívají například pro výpočet odhadů průhybů nosníků ve stavebních konstrukcích, pro výpočty užitečného zatížení konstrukcí, dopravní modely, plánování výstavby trolejového vedení či zkoumání stability stavebních staveb.

Diferenciální rovnice

Definice

Rovnice obsahující derivace nebo diferenciály jedné závislé funkce je nazývána diferenciální rovnicí. Rovnici nazýváme obyčejnou, obsahuje-li pouze jednu nezávislou proměnnou. V opačném případě nazýváme danou rovnici parciální.

Definice

Řádem diferenciální rovnice nazýváme řád nejvyšší derivace v dané diferenciální rovnici.

Diferenciální rovnice

Definice

Funkci f *nazýváme řešením rovnice* $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ *na intervalu* I, *pokud ji substituce* $y = f(x)$ *mění na tomto intervalu na identitu. Řešení se také často nazývá integrální křivkou.*

Názvy jednotlivých řešení

Definice

Partikulární řešení

Řešení diferenciální rovnice, které neobsahuje žádné libovolné parametry nazýváme partikulární řešení.

Definice

Parametrické řešení

Množinu funkcí, obsahující n parametrů $C_1, C_2, \ldots, C_n$, *zapsanou pomocí relace* $G(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ *nazýváme n-parametrickou množinou řešení, jestliže libovolná volba parametrů* $C_1, C_2, \ldots, C_n$, *dává některé konkrétní řešení diferenciální rovnice.*

Názvy jednotlivých řešení

Definice

Obecné řešení

Lze-li každé řešení rovnice $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ *obdržet nějakou volbou parametrů z množiny funkcí* $G(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ *pak říkáme, že tato n-parametrická množina je obecným (kompletním) řešením diferenciální rovnice.*

Definice

Singulární řešení

Řešení, které nelze získat některou volbou parametrů parametrického řešení, nazýváme singulární řešení.

Počáteční úloha

- Diferenciální rovnice mají nekonečně mnoho řešení. Při řešení praktických úloh potřebujeme často vyčlenit pouze jedno partikulární řešení, které prochází některým daným bodem (určit parametry tak, aby formulovaná podmínka platila).
- Formulujeme tzv. **počáteční úlohu (Cauchyova úloha)** pro DR prvního řádu.

  Najít řešení $y = y(x)$ rovnice $y' = f(x, y)$ vyhovující podmínce $y(x_0) = y_0$.

Počáteční úloha

- Počáteční úloha pro rovnici n-tého řádu je formulovaná podobně jako úloha pro DR prvního řádu. (Potřebujeme n-tici počátečných podmínek.)
- Je nutné najít řešení rovnice $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ vyhovující podmínkám

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

kde $x_0, y_0, y'_0 \dots, y_0^{(n-1)}$ jsou daná čísla.

Existence a jednoznačnost řešení úlohy

- Je-li funkce $f(x, y)$ spojitá na oblasti D, pak diferenciální rovnice $y = f(x, y)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$ má řešení v okolí bodu x_0.
- Počáteční úloha má pouze jedno řešení, má-li funkce $f(x, y)$ spojité parciální derivace na oblasti D.
- Existenci v okolí bodu nelze zobecňovat, mluvíme o tzv. prodloužitelnosti řešení. Budeme předpokládat, že to platí na celém intervalu.

Separovaná rovnice

- Rovnice se separovanými argumenty má tvar

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

Děkuji za pozornost!