BAA003 - MATEMATIKA 3

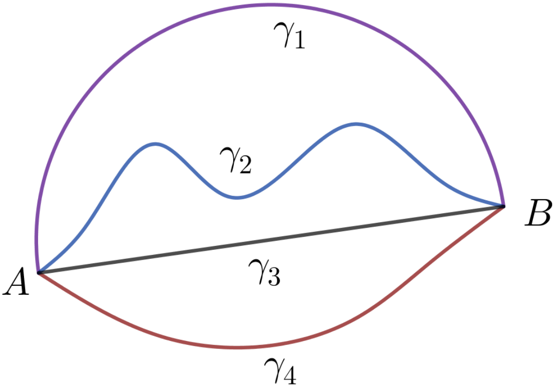
Hana Boháčková

FAST VUT

2024

Nezávislost na integrační cestě

Jestliže uvedený integrál nezávisí na integrační cestě mezi libovolnými body A, B, říkáme, že integrál nezávisí na integrační cestě.



Nezávislost na integrační cestě; $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Věta

Nechť vektorové pole $\vec{f} = (P, Q)$ *je třídy* C^1 *na jednoduše souvislé oblasti* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$*. Pak toto pole je potenciílní tehdy a jen tehdy, když*

$$Q'_x(x, y) = P'_y(x, y).$$

Nezávislost na integrační cestě; $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Věta

Nechť vektorové pole $\vec{f} = (P, Q)$ je třídy C^1 v jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Křivkový integrál

$$\int_\gamma \vec{f}(x, y) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_\gamma P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y,$$

kde $\gamma \subset \Omega$ nezávisí na integrační cestě AB v oblasti Ω tehdy a jen tehdy, když vektorové pole $\vec{f}$ je na Ω potenciální. Je-li V jeho potenciál na Ω, pak platí

$$\int_A^B P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = V(B) - V(A).$$

Nezávislost na integrační cestě; $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

Věta

Nechť vektorové pole $\vec{f} = (P, Q, R)$ *je třídy* C^1 *na plošně jednoduše souvislé oblasti* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. *Pak toto pole je potenciílní tehdy a jen tehdy, když*

$$\mathit{rot}\, \vec{f}(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

pro každé $[x, z, y] \in \Omega$.

Nezávislost na integrační cestě; $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

- Determinant rotace vektorového pole

$$rot\,\vec{f}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) & R(x,y,z) \end{vmatrix}$$

$$= \left(R'_y - Q'_z\right)\vec{i} + \left(P'_z - R'_x\right)\vec{j} + \left(Q'_x - P'_y\right)\vec{k}.$$

Nezávislost na integrační cestě; $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

Věta

Nechť $\vec{f} = (P, Q, R)$ je třídy C^1 v plošně jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Křivkový integrál

$$\int_\gamma \vec{f}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_\gamma P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z,$$

kde $\gamma \subset \Omega$ nezávisí na integrační cestě AB v oblasti Ω tehdy a jen tehdy, když vektorové pole $\vec{f}$ je na Ω potenciální. Je-li V jeho potenciál na Ω, pak platí

$$\int_A^B P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z = V(B) - V(A).$$

Děkuji za pozornost!