BAA003 - MATEMATIKA 3

Hana Boháčková

FAST VUT

2024

Křivkový integrál ve vektorovém poli

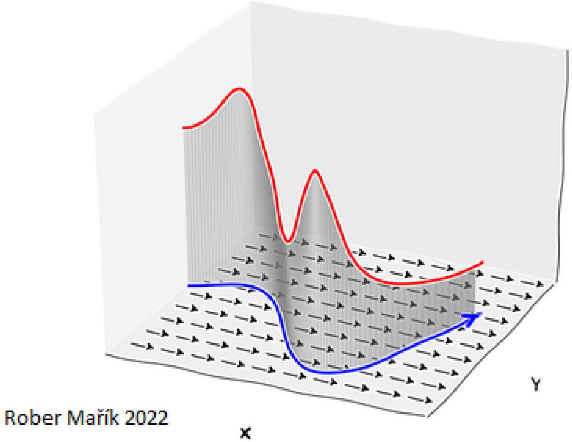
Ve fyzice a v technických aplikacích se často setkávámé s různými druhy vektorových polí - silové pole, pole rychlosti částic proudící nestlačitelné kapaliny, pole magnetické a elektrické intenzity.

Pro $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ značíme vektorové pole jendoduše

$$\vec{f}(x, z, y) = (P(x, y), Q(x, y)),$$

$$\vec{f}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

Křivkový integrál ve vektorovém poli



Křivkový integrál ve skalárním poli

- uvažme oblouk $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$)
- $\vec{t}(M_i)$ je jednotkový tečný vektor
- $\vec{f}(M_i)$ je vektor síly
- s_i délka oblouku $\widehat{A_i A_{i+1}}$
- práce vektorového pole $W_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}(M_i) \cdot \vec{t}(M_i) s_i$

Křivkový integrál ve vektorovém poli

Definice

Nechť $\vec{f}$ je spojité vektorové pole na orientovaném oblouku γ. Křivkovým integrálem ve vektorovém poli $\vec{f}$ (křivkovým integrálem druhého druhu) přes křivku γ nazýváme integrál tvaru

$$\int_{\gamma} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\gamma} \vec{f} \cdot \vec{t} \, \mathrm{d}s.$$

Křivkový integrál ve skalárním poli

Mnohdy se používá označení

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot \vec{t} \, \mathrm{d}s = \int_\gamma P(x,y) \, \mathrm{d}x + Q(x,y) \, \mathrm{d}y$$

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot \vec{t} \, \mathrm{d}s = \int_\gamma P(x,y,z) \, \mathrm{d}x + Q(x,y,z) \, \mathrm{d}y + R(x,y,z) \, \mathrm{d}z$$

Křivkový integrál ve skalárním poli

Je-li křivka dána parametrizací oblouku a parametrice oblouku souhlasí s jeho orientací, pak platí

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot\vec{t}\,\mathrm{d}s = \int_a^b [P(\varphi(t),\psi(t))\dot{\varphi}(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\dot{\psi}(t)]\,\mathrm{d}t$$

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot\vec{t}\,\mathrm{d}s = \int_a^b [P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\dot{\varphi}(t)$$

$$+Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\dot{\psi}(t) + R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\dot{\chi}(t)]\,\mathrm{d}t$$

Základní vlastnosti křivkového integrálu

Věta

(a) **Linearita**. *Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ je oblouk a funkce $\vec{f}$ a $\vec{g}$ jsou spojitá vektrová pole na oblouku γ. Pak platí*

$$\int_\gamma (c_1\vec{f} + c_2\vec{g}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = c_1 \int_\gamma \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} + c_2 \int_\gamma \vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{s},$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné reálné konstanty.

(b) **Aditivita**. *Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ je křivka, která je sjednocením dvou orientovaných oblouků γ_1, γ_2 a $\vec{f}$ je spojité vektorové pole na křivce γ. Pak platí*

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$

Děkuji za pozornost!