BAA003 - MATEMATIKA 3

Hana Boháčková

FAST VUT

2024

Křivkový integrál ve skalárním poli

Pojem KŘIVKY je poměrně složitý. Přesná definice se zavádí v diferenciální geometrii. Křivky můžeme dělit podle různých hledisek.

- rovinné
- prostorové

Analytické vyjádření křivky

- jako graf funkce
- parametrické vyjádření
- obecná rovnice křivky

Kružnice

- obecná rovnice $S[x_0, y_0], r > 0$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

- parametrické vyjádření $S[x_0, y_0], r > 0, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$$x = x_0 + rcost$$
$$y = y_0 + rsint$$

Elipsa

- obecná rovnice $S[x_0, y_0]; a, b > 0$

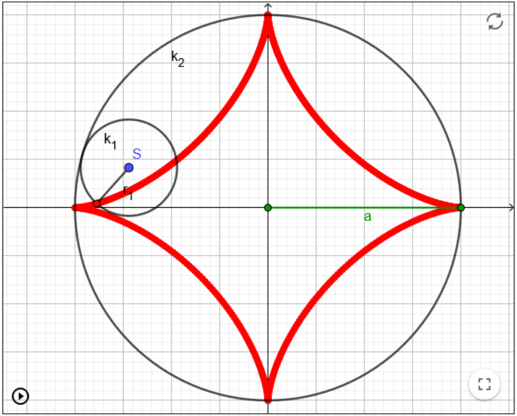
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

- parametrické vyjádření $S[x_0, y_0; a, b > 0, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

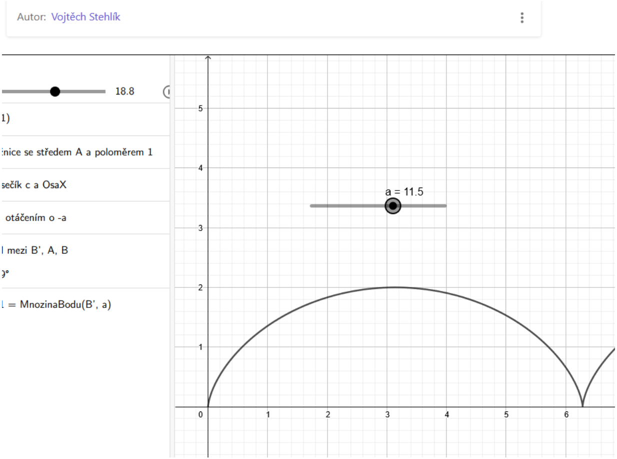
$$x = x_0 + acost$$
$$y = y_0 + bsint$$

Asteroida

Autor: pavel-dolezal

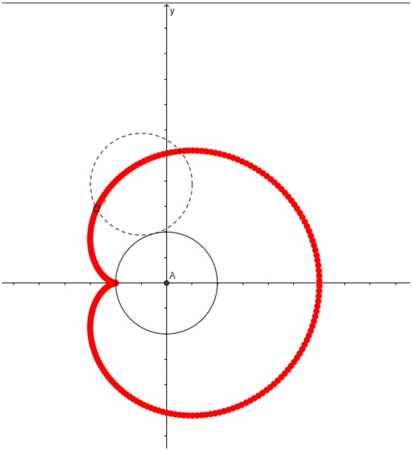


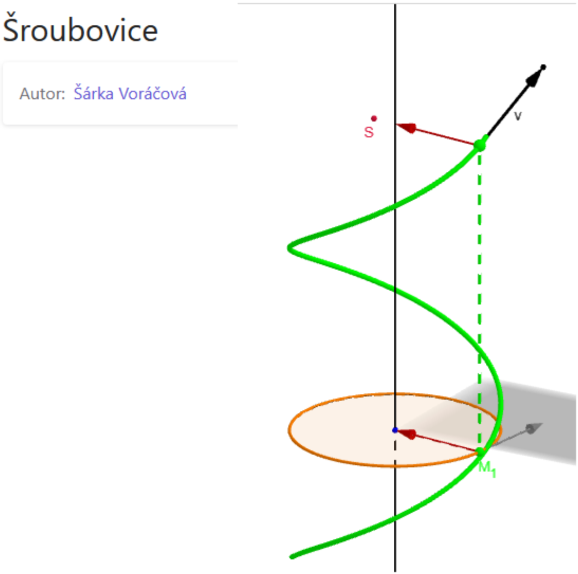
Cykloida


Autor: Vojtěch Stehlík
18.8
1)
ɪnice se středem A a poloměrem 1
sečík c a OsaX
otáčením o -a
l mezi B', A, B
l = MnozinaBodu(B', a)
a = 11.5
0
1
2
3
4
5
6

Kardioida

Autor: Luděk Spíchal




Šroubovice
Autor: Šárka Voráčová
S
v
M1

Křivkový integrál ve skalárním poli

- uvažme oblouk $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ a jeho parametrické vyjádření φ, ψ na $\langle a, b\rangle$
- $\varrho(M)$ je hustota křivky v bodě M
- s_i délka oblouku $\widehat{A_i A_{i+1}}$
- hmotnost oblouku křivky $m_i = \varrho(M_i)s_i$
- nahradíme hustotu ϱ libovonou spojitou funkci f na oblouku γ

Křivkový integrál ve skalárním poli

Definice

Jestliže existuje konečná limita integrálního počtu

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)s_i,$$

která nezávisí jak na dělení křivky γ, tak na výběru bodů M_i na obloucích $\overparen{A_iA_{i+1}}$, pak tuto limitu značíme

$$\int_\gamma f(M)\,\mathrm{d}s = \int_\gamma f(x,y)\,\mathrm{d}s$$

a nazveme ji křivkovým integrálem funkce f přes křivku γ.

Křivkový integrál ve skalárním poli

Věta

Nechť je dán reálná funkce f na po částech hladné křivce v rovině zadané parametrickými funkcemi φ, ψ na $\langle a, b\rangle$. Pak platí

$$\int_\gamma f(M)\,\mathrm{d}s = \int_\gamma f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\dot\varphi^2(t)+\dot\psi^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Křivkový integrál ve skalárním poli

Věta

Nechť oblouk je dán parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ *pro* $t \in \langle a, b \rangle$ *a funkce* f *je spojitá na oblouku* γ. *Pak platí*

$$\int_\gamma f(M)\,\mathrm{d}s = \int_\gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t) + \dot{\chi}^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Základní vlastnosti křivkového integrálu

Věta

(a) **Linearita**. *Nechť* $\gamma \subset \mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ *je oblouk a funkce* f *a* g *jsou spojité na oblouku* γ. *Pak platí*

$$\int_\gamma (c_1 f + c_2 g)(M)\,\mathrm{d}s = c_1 \int_\gamma f(M)\,\mathrm{d}s + c_2 \int_\gamma g(M)\,\mathrm{d}s$$

kde c_1 *a* c_2 *jsou libovolné reálné konstanty.*

(b) **Aditivita**. *Nechť* $\gamma \subset \mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ *je křivka, která je sjednocením dvou oblouků* γ_1, γ_2 *a funkce* f *je spojitá na křivce* γ. *Pak platí*

$$\int_\gamma f(M)\,\mathrm{d}s = \int_{\gamma_1} f(M)\,\mathrm{d}s + \int_{\gamma_2} g(M)\,\mathrm{d}s.$$

Geometrické aplikace

- Délka křivky

$$L = \int_{\gamma} f(M) \, \mathrm{d}s$$

- Obsah části válcové plochy Φ s řídící křivkou $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ v rovině $z = 0$ a tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a vymezenými plochami $z = g(x, y) \leq z = f(x, y)$ pro každé $[x, y] \in \gamma$

$$P = \int_{\gamma} [f(x, y) - g(x, y)] \, \mathrm{d}s$$

Fyzikální aplikace

- Hmotnost drátu ve tvaru křivky.

$$m = \int_{\gamma} \varrho(x, y, z)\,\mathrm{d}s$$

s lineární hustotou $\varrho(x, y, z) = \varrho[kg \cdot m^{-1}]$

Fyzikální aplikace

- **Statický moment** hmotného drátu ve tvaru křivky $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ vzhledem k přímce p.

$$S_p = \int\limits_{\gamma} d([x, y], p) \cdot \varrho(x, y)\,\mathrm{d}s,$$

kde $d([x, y], p)$ je orientovaná vzdálenost bodu $[x, y]$ od přímky p.

- Speciální případ vzhledem k souřadnicovým osám x a y

$$S_x = \int\limits_{\gamma} y \cdot \varrho(x, y)\,\mathrm{d}s, \quad S_y = \int\limits_{\gamma} x \cdot \varrho(x, y)\,\mathrm{d}s$$

Fyzikální aplikace

- **Statický moment** hmotného drátu ve tvaru křivky $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ vzhledem k rovině τ.

$$S_\tau = \int\limits_\gamma d([x,y,z],\tau) \cdot \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s,$$

kde $d([x,y,z],\tau)$ je orient. vzdálenost bodu $[x,y,z]$ od roviny τ.

- Speciální případ vzhledem k souřadnicovým rovinám xy, xz a yz

$$S_{xy} = \int\limits_\gamma z \cdot \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s, \quad S_{xz} = \int\limits_\gamma y \cdot \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s,$$

$$S_{yz} = \int\limits_\gamma x \cdot \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

Fyzikální aplikace

- Těžiště hmotného drátu ve tvaru křivky $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ a $\gamma \subset \mathbb{R}^3$

$$T = \left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m}\right], \quad T = \left[\frac{S_{yz}}{m}, \frac{S_{xz}}{m} \frac{S_{xy}}{m}\right]$$

- **Moment setrvačnosti** hmotného drátu ve tvaru křivky $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ vzhledem k přímce $p \subset \mathbb{R}^2$, resp. $p \subset \mathbb{R}^3$.

$$I_p = \int_\gamma d^2([x,y],p) \cdot \varrho(x,y)\,\mathrm{d}s,$$

$$I_p = \int_\gamma d^2([x,y,z],p) \cdot \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s,$$

kde $d([x,y],p)$ je vzdálenost bodu $[x,y]$ od přímky $p \subset \mathbb{R}^2$, resp. $d([x,y,z],p)$ je vzdálenost bodu $[x,y,z]$ od přímky $p \subset \mathbb{R}^3$.

Fyzikální aplikace

- Speciální případ vzhledem k souřadnicovým osám x a y

$$I_x = \int\limits_{\gamma} y^2 \cdot \varrho(x,y)\,\mathrm{d}s, \quad I_y = \int\limits_{\gamma} x^2 \cdot \varrho(x,y)\,\mathrm{d}s,$$

- Speciální případ vzhledem k souřadnicovým osám x, y a z

$$I_x = \int\limits_{\gamma} (y^2+z^2) \cdot \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s, \quad I_y = \int\limits_{\gamma} (x^2+z^2) \cdot \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}s,$$

$$I_z = \int\limits_{\gamma} (x^2+y^2) \cdot \varrho(x,y,z)\mathrm{d}s$$

Děkuji za pozornost!