

BAA003 - MATEMATIKA 3

Hana Boháčková

FAST VUT

2024

Transformace trojného integrálu

- $\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na Ω
- $G = (\varphi, \psi, \chi)$ je prosté zobrazení
- Jakobián:

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_w \\ \psi'_u & \psi'_v & \psi'_w \\ \chi'_u & \chi'_v & \chi'_w \end{vmatrix}$$

Transformace trojného integrálu

Věta

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina a G je prosté zobrazení, φ, ψ, χ jsou spojitě diferencovatelné a $J(u, v, w) \neq 0$ v každém bodě $[u, v, w] \in \Omega$. Nechť $K \subset \Omega$ je sjednocením konečného počtu elementárních oblastí prvního, druhého nebo třetího druhu a funkce f je spojitá. Pak platí:

$$\begin{aligned} & \iiint_{G(K)} f(x, y, z) \, dx dy dz \\ &= \iiint_K f((\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) |J(u, v, w)| \, du dv dw. \end{aligned}$$

Nejdůležitější typy transformací

- Cylindrické souřadnice

$$x = r \cos t \equiv \varphi(r, t, z)$$

$$y = r \sin t \equiv \psi(r, t, z)$$

$$z = z \equiv \chi(r, t, z)$$

- $J = r; r > 0; t \in \langle -\pi, \pi \rangle, z \in \mathbb{R}$

Nejdůležitější typy transformací

- Zobecněné cylindrické souřadnice

$$x = ar \cos t \equiv \varphi(r, t, z)$$

$$y = br \sin t \equiv \psi(r, t, z)$$

$$z = z \equiv \chi(r, t, z)$$

- $J = abr$; $a, b, r > 0$; $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $z \in \mathbb{R}$

Nejdůležitější typy transformací

- Sférické souřadnice

$$x = \rho \cos\varphi \cos\gamma$$

$$y = \rho \sin\varphi \cos\gamma$$

$$z = \rho \sin\gamma$$

- $J = \rho^2 \cos\gamma; \rho > 0; \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \gamma \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$

Nejdůležitější typy transformací

- Zobecněné sférické souřadnice

$$x = a\rho \cos\varphi \cos\gamma$$

$$y = b\rho \sin\varphi \cos\gamma$$

$$z = c\rho \sin\gamma$$

- $J = abc\rho^2 \cos\gamma$; $a, b, c, \rho > 0$; $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $\gamma \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$

Aplikace dvojného integrálu

- Objem tělesa

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz$$

- Hmotnost tělesa o dané hustotě

$$m(\Omega) = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Aplikace dvojného integrálu

- Statický moment tělesa vzhledem k souřadnicovým rovinám xy , xz a yz

$$S_{xy} = \iiint_{\Omega} z \cdot \sigma(x, y, z) dx dy dz$$

$$S_{xz} = \iiint_{\Omega} y \cdot \sigma(x, y, z) dx dy dz$$

$$S_{yz} = \iiint_{\Omega} x \cdot \sigma(x, y, z) dx dy dz$$

Aplikace dvojného integrálu

- Těžiště tělesa

$$T = \left[\frac{S_{yz}}{m}, \frac{S_{xz}}{m}, \frac{S_{xy}}{m} \right]$$

- Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k osám x , y a z

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \cdot \sigma(x, y, z) dx dy dz$$

$$I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \cdot \sigma(x, y, z) dx dy dz$$

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \cdot \sigma(x, y, z) dx dy dz$$

Děkuji za pozornost!