BAA003 - MATEMATIKA 3

Hana Boháčková

FAST VUT

2024

Trojný integrál na trojrozměrném intervalu

- uvažme interval $I = \langle a, b\rangle x\langle c, d\rangle x\langle e, f\rangle \subset \mathbb{R}^3$, dělící body

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

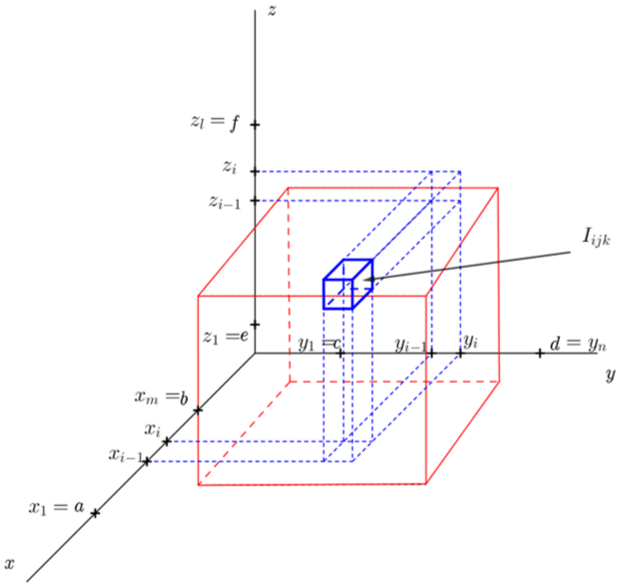
$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d,$$

$$e = z_0 < z_1 < \cdots < z_l = f$$

  D_{mnl} dělení I.

- objem intervalu I definujeme

$$\mu(I_{ijk}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}).$$



z
$z_l = f$
z_i
z_{i-1}
I_{ijk}
$z_1 = e$
$y_1 = c$
y_{i-1}
y_i
$d = y_n$
y
$x_m = b$
x_i
x_{i-1}
$x_1 = a$
x

Trojný integrál na trojrozměrném intervalu

Definice

Nechť f je ohraničená funkce na I, D_{mnl} dělení I s dělicími body $x_0, x_1, \ldots, x_m, y_0, y_1, \ldots, y_n, z_0, z_1, \ldots, z_l$.
Označme $N(D_{mnl})$ množinu všech mnl-tic bodů $M_{ijk} \in I_{ijk}$. Číslo

$$S(f, D_{mnl}, N(D_{mnl})) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} f(M_{ijk}) \mu(I_{ijk})$$

nazýváme Riemannovým integrálním součtem funkce f příslušným dělení D_{mnl} a mnl-tici bodů z $N(D_{mnl})$.

Trojný integrál na trojrozměrném intervalu

Definice

Řekneme, že funkce f má na $I \subset \mathbb{R}^3$ trojný Riemannův integrál právě tehdy, když existuje konečná limita

$$\lim_{n(D)\to 0} S(f, D_{mnl}, N(D_{mnl})),$$

Tuto limitu značíme

$$\iiint\limits_I f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Věta o existenci integrálu

Věta

Každá funkce spojitá na intervalu $I \subset \mathbb{R}^3$ *je integrovatelná.*

Trojný integrál na oblastech I., II. a III. druhu

- elementární oblast I. druhu je množina

$$\Omega_I = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in \Omega_{xy} \subset \mathbb{R}^2, g_1(x, y) < z < h_1(x, y)\}$$

- elementární oblast II. druhu je množina

$$\Omega_{II} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, z] \in \Omega_{xz} \subset \mathbb{R}^2, g_2(x, z) < y < h_2(x, z)\}$$

- elementární oblast III. druhu je množina

$$\Omega_{III} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [y, z] \in \Omega_{yz} \subset \mathbb{R}^2, g_3(y, z) < x < h_3(y, z)\}$$

Fubiniho věta

Věta

(a) Nechť funkce f je integrovatelná na množině Ω_I. Jestliže pro každé $[x,y] \in \Omega_{xy}$ je funkce $f(x,y,z)$ (nyní proměnné z) intergrovatelná na intervalu $\langle g_1(x,y), h_1(x,y)\rangle$, pak funkce

$$F_1(x,y) = \int_{g_1(x,y)}^{h_1(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

je integrovatelná na množině $\Omega_{x,y}$ a platí

$$\iiint\limits_{\Omega_I} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Omega xy} F_1(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Omega xy} \left(\int_{g_1(x,y)}^{h_1(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Fubiniho věta

Věta

(b) Nechť funkce f je integrovatelná na množině Ω_{II}. Jestliže pro každé $[x, z] \in \Omega_{xz}$ je funkce $f(x, y, z)$ (nyní proměnné y) intergrovatelná na intervalu $\langle g_2(x, z), h_2(x, z)\rangle$, pak funkce

$$F_2(x, z) = \int_{g_2(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}y.$$

je integrovatelná na množině $\Omega_{x,z}$ a platí

$$\iiint\limits_{\Omega_{II}} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Omega xz} F_2(x, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{\Omega xz} \left(\int_{g_2(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

Fubiniho věta

Věta

(c) Nechť funkce f je integrovatelná na množině Ω_{III}. Jestliže pro každé $[y,z] \in \Omega_{yz}$ je funkce $f(x,y,z)$ (nyní proměnné x) intergrovatelná na intervalu $\langle g_3(y,z), h_3(y,z)\rangle$, pak funkce

$$F_3(y,z) = \int_{g_3(y,z)}^{h_3(y,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x.$$

je integrovatelná na množině $\Omega_{y,z}$ a platí

$$\iiint\limits_{\Omega_{III}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Omega xz} F_3(y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{\Omega yz} \left(\int_{g_3(y,z)}^{h_3(y,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Základní vlastnosti trojného integrálu

Nechť $\Omega, \Omega_I, \Omega_{II}$ jsou oblasti prvního nebo druhého druhu a nechť f, g jsou funkce integrovatené na Ω. Pak platí:

(a)

$$\iiint\limits_{\Omega} (f(x,y,z) \pm g(x,y,z))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \pm \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(b)

$$\iiint\limits_{\Omega} kf(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = k \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$.

Základní vlastnosti trojného integrálu

(c) Jestliže pro každé $[x, y, z] \in \Omega$ platí $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$, pak

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \leq \iiint\limits_{\Omega} g(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(d) $|f| \in \mathbb{R}(\Omega)$ a platí

$$\left|\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right| \leq \iiint\limits_{\Omega} |f(x, y, z)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Základní vlastnosti trojného integrálu

(e) Jestliže pro každé $[x, y, z] \in \Omega$ platí že $|f(x, y, z)| \leq M$, pak

$$\left|\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right| \leq \iiint\limits_{\Omega} |f(x,y,z)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \leq M\mu(\Omega).$$

(f) Jestliže $\mathrm{int}\Omega_1 \cap \mathrm{int}\Omega_2 = \emptyset$, $f \in \mathbb{R}(\Omega_1)$ a $f \in \mathbb{R}(\Omega_2)$, pak je finkce f integrovatelná na $\Omega_1 \cup \Omega_2$ a platí:

$$\iiint\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Základní vlastnosti trojného integrálu

(g) $f \cdot g \in \mathbb{R}(\Omega)$

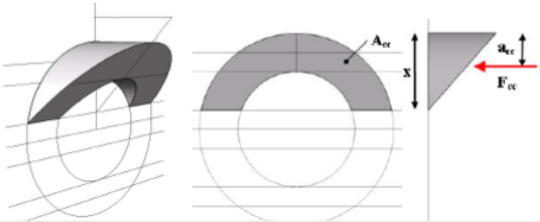
(h) Jestliže je funkce f spojitá na $\bar{\Omega}$, pak existuje bod $[\xi, \eta, \zeta] \in \bar{\Omega}$ tak, že

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = f(\xi, \eta, \zeta)\mu(\Omega).$$

2.7 Objem a těžiště tlačené plochy betonu

Při dimenzování betonových konstrukcí se setkáváme s problematikou určení velikosti síly F_{cc} v tlačené oblasti betonového průřezu. Tato síla se stanovuje např. pro tzv. mezní stav použitelnosti za předpokladu lineárního rozdělení napětí σ_c. V řešení je nutno znát polohu tzv. neutrálné (nulové) osy x, tj. osy s nulovým poměrným přetvořením ε_c. Tato poloha se získá řešením podmínek rovnováhy vnějších a vnitřních sil (silová a momentová podmínka rovnováhy) a to buď přímo a nebo iteračně. V tomto procesu se právě vyskytuje problém určení síly F_{cc} jako objemu napětí σ_c na ploše tlačeného betonu A_{cc}, jejíž obrazec může mít i zcela obecný tvar, a v neposlední řadě také určení polohy síly F_{cc} v tlačené ploše průřezu a_{cc}, jako těžiště objemu napětí σ_c.

Příkladem pro řešení je zvolen průřez tvaru mezikruží.



$$\Omega_1: \quad r_1 \le \rho \le r_2, \quad -\pi \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le z \le k\rho\cos\varphi + q.$$

Pak hmotnost (číselně také objem)

$$m(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz = \iiint_{\Omega_1} |J(\rho,\varphi)| d\rho d\varphi dz =$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} \rho d\rho \int_{-pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{k\rho\cos\varphi+q} dz = q\pi \cdot (r_2^2 - r_1^2),$$

statické momenty vzhledem k souřadnicovým rovinám

$$S_{yz}(\Omega) = \iiint_\Omega x\, dxdydz = \frac{1}{4}k\pi \cdot (r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 + r_1^2),$$

$$S_{xz}(\Omega) = \iiint_{\Omega} y \, dxdydz = 0,$$

$$S_{xy}(\Omega) = \iiint_{\Omega} z \, dxdydz = \frac{\pi}{8} \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cdot (k^2(r_1^2 + r_2^2) + 4q^2).$$

Hledané těžiště má proto souřadnice

$$T = \left[\frac{S_{yz}(\Omega)}{m(\Omega)}, \frac{S_{xz}(\Omega)}{m(\Omega)}, \frac{S_{xy}(\Omega)}{m(\Omega)}\right] = \left[\frac{k}{4q}(r_1^2 + r_2^2), 0, \frac{k^2}{8q}(r_1^2 + r_2^2) + \frac{q}{2}\right]$$

Děkuji za pozornost!