BAA003 - MATEMATIKA 3

Hana Boháčková

FAST VUT

2024

Transformace dvojného integrálu

- Účelem transformace je zjednodušit integrační obor nebo integrovanou funkci. Nejlepší je, když se podaří zlepšit obojí.
- Je to analogie substituční metody. Místo o substituční metodě se u vícerozměrných integrálů často mluví o záměně proměnných v integrálu nebo o transformaci integrálu.

Transformace dvojného integrálu

- $\varphi(u,v), \psi(u,v)$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na Ω
- $G = (\varphi, \psi)$ je prosté zobrazní
- Jakobián:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \varphi_u' & \varphi_v' \\ \psi_u' & \psi_v' \end{vmatrix}$$

Transformace dvojného integrálu

Věta

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *je otevřená množina a* G *je prosté zobrazení,* φ, ψ *jsou spojitě diferenovatelné a* $J(u, v) \neq 0$ *v každém bodě* $[u, v] \in \Omega$*. Nechť* $K \subset \Omega$ *je sjednocením konečného počtu elementarních oblastí prvního nebo druhého druhu, a funce* f *je spojitá. Pak platí:*

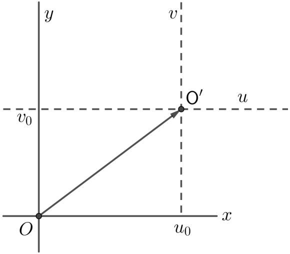
$$\iint\limits_{G(K)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{K} f((\varphi(u, v), \psi(u, v))|J(u, v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Nejdůležitější typy transformací

- Posunutí

$$x = u_0 + u \equiv \varphi(u, v)$$
$$y = v_0 + v \equiv \psi(u, v)$$

- $J(u, v) = 1$

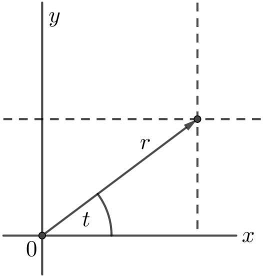


Nejdůležitější typy transformací

- Polární souřadnice

$$x = r\,cost \equiv \varphi(r,t)$$
$$y = r\,sint \equiv \psi(r,t)$$

- $J(u,v) = r;\ t \in \langle -\pi, \pi \rangle;\ r > 0$



Nejdůležitější typy transformací

- Zobecněné polární souřadnice

$$x = ar\,cost \equiv \varphi(r, t)$$
$$y = br\,sint \equiv \psi(r, t)$$

- $J(u, v) = abr;\ a, b, r > 0;\ t \in \langle -\pi, \pi \rangle$

Geometrické aplikace dvojného integrálu

- Obsah rovinného obrazce

$$\mu(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- Objem válcového tělesa

  Těleso je dáno
  $K = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, g(x, y) < z < f(x, y)\}$

$$V(K) = \iint\limits_{\Omega} \big(f(x, y) - g(x, y)\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Geometrické aplikace dvojného integrálu

- Obsah plochy

  Plocha je dána
  $K = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, z = f(x, y)\}$

$$S(K) = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + [f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2} \;\; \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Fyzikální aplikace dvojného integrálu

- Hmotnost tenké rovinné desky o dané plošné hustotě

$$m(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \sigma(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- Statický moment tenké rovinné desky vzhledem k ose x, y

$$S_x = \iint\limits_{\Omega} y \cdot \sigma(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad S_y = \iint\limits_{\Omega} x \cdot \sigma(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Fyzikální aplikace dvojného integrálu

- Těžiště rovinné desky

$$T = \left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m}\right]$$

- Moment setrvačnosti tenké rovinné desky vzhledem k ose x, y

$$I_x = \iint\limits_{\Omega} y^2 \cdot \sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad I_y = \iint\limits_{\Omega} x^2 \cdot \sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Děkuji za pozornost!