BAA003 - MATEMATIKA 3

Hana Boháčková

FAST VUT

2024

Literatura

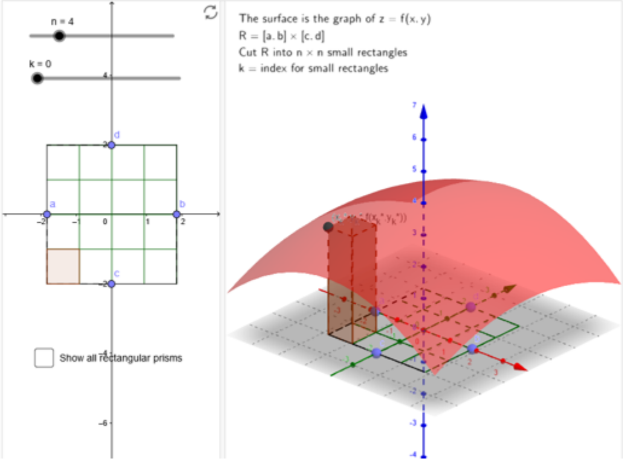
- DANĚČEK, J., DLOUHÝ, O., PŘIBYL, O.: Dvojný a trojný integrál, CERM Brno, 2006
- DANĚČEK, J., DLOUHÝ, O., PŘIBYL, O.: Křivkové integrály, CERM Brno, 2006
- DIBLÍK, J., PŘIBYL,O.: Obyčejné diferenciální rovnice, CERM Brno, 2004
- KOUTKOVÁ, H., PRUDILOVÁ, K: Sbírka příkladů z matematiky III, CERM Brno, 2007
- HŘEBÍČKOVÁ, J. a kol: Sbírka příkladů z matematiky II

Informace k předmětu BAA003, ukázkové písemky, generátor zkouškových písemek

https://mat.fce.vutbr.cz/studium/matematika-3/

Double Integrals

Author: Ku, Yin Bon (Albert)



Dvojný integrál na dvojrozměrném intervalu

- uvažme interval $I = \langle a, b\rangle x\langle c, d\rangle \subset \mathbb{R}^2$, dělící body

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d,$$

  D_{mn} dělení I.

- obsah intervalu I definujeme

$$\mu(I_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}), i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n.$$

Dvojný integrál

Definice

Nechť f je ohraničená funkce na I, D_{mn} dělení I s dělicími body

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

.

Označme $N(D_{mn})$ množinu všech mn-tic bodů $M_{ij} \in I_{ij}$. Číslo

$$S(f, D_{mn}, N(D_{mn})) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(M_{ij})\mu(I_{ij})$$

nazýváme Riemannovým integrálním součtem funkce f příslušným dělení D_{mn} a mn-ticemi bodů z $N(D_{mn})$.

Dvojný integrál

Definice

Řekneme, že funkce f má na $I \subset \mathbb{R}^2$ dvojný Riemannův integrál právě tehdy, když existuje konečná limita

$$\lim_{n(D)\to 0} S(f, D_{mn}, N(D_{mn})),$$

Tuto limitu značíme

$$\iint\limits_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Věta o existenci integrálu

Věta

Každá funkce spojitá na $I = \langle a, b\rangle x\langle c, d\rangle \subset \mathbb{R}^2$ *je integrovatelná.*

Dvojný integrál na oblastech prvního a druhého druhu

- elementární oblast I. druhu je množina

$$\Omega_I = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, g(x) < y < G(x)\}$$

- elementární oblast II. druhu je množina

$$\Omega_{II} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : c < y < d, h(y) < x < H(y)\}$$

Fubiniho věta

Věta

(a) Nechť existuje $\iint\limits_{\Omega_I} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *a pro každé* $x \in \langle a, b\rangle$ *nechť existuje integrál*

$$J(x) = \int_{g(x)}^{G(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Pak existuje také dvojnásobný integrál

$$\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{G(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

a platí rovnost

$$\iint\limits_{\Omega_I} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b J(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{G(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Fubiniho věta

Věta

(b) Nechť existuje $\iint\limits_{\Omega_{II}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *a pro každé* $y \in \langle c, d\rangle$ *nechť existuje integrál*

$$K(y) = \int_{h(y)}^{H(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Pak existuje také dvojnásobný integrál

$$\int_c^d \left(\int_{h(y)}^{H(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

a platí rovnost

$$\iint\limits_{\Omega_{II}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d K(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{h(y)}^{H(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Základní vlastnosti dvojného integrálu

Nechť $\Omega, \Omega_I, \Omega_{II}$ jsou oblasti prvního nebo druhého druhu a nechť f, g jsou funkce integrovatené na Ω. Pak platí:

(a)

$$\iint\limits_{\Omega} (f(x,y) + g(x,y))\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Omega} g(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(b)

$$\iint\limits_{\Omega} kf(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = k \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $k \in \mathbb{R}$.

Základní vlastnosti dvojného integrálu

(c) Jestliže pro každé $[x, y] \in \Omega$ platí $f(x, y) \le g(x, y)$, pak

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint\limits_{\Omega} g(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(d) $|f| \in \mathbb{R}(\Omega)$ a platí

$$\left|\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le \iint\limits_{\Omega} |f(x, y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Základní vlastnosti dvojného integrálu

(e) Jestliže pro každé $[x, y] \in \Omega$ platí že $|f(x, y)| \le M$, pak

$$\left| \iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| \le \iint\limits_{\Omega} |f(x, y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le M\mu(\Omega).$$

(f) Jestliže $\mathrm{int}\Omega_1 \cap \mathrm{int}\Omega_2 = \emptyset$, $f \in \mathbb{R}(\Omega_1)$ a $f \in \mathbb{R}(\Omega_2)$, pak je finkce f integrovatelná na $\Omega_1 \cup \Omega_2$ a platí:

$$\iint\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Omega_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Základní vlastnosti dvojného integrálu

(g) $f \cdot g \in \mathbb{R}(\Omega)$

(h) Jestliže je funkce f spojitá na $\bar{\Omega}$, pak existuje bod $[\xi, \eta] \in \bar{\Omega}$ tak, že

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi, \eta)\mu(\Omega).$$

2.1 Eulerova vzpěrná pevnost

Zjistěte posunutí všech bodů štíhlého kloubově uloženého lineárně pružného kovového sloupu délky l s kruhovým průřezem o poloměru $r << l$, zatíženým osovou silou N; gravitační síly zanedbejte. Je znám kladný Youngův modul pružnosti (v tahu, tlaku i ohybu) E.

Řešení: Uvažujme sloup jako jednorozměrnou konstrukci s body $x \in \langle 0, l \rangle$, s pevným kloubem v bodě $x = 0$ a s posuvným kloubem v bodě $x = l$, v němž působí síla N, která je kladná, jde-li o tlak, a záporná, jde-li o tah.

Nejprve vypočteme obsah průřezu A a moment setrvačnosti J (pro rovinnou úlohu, ve směru kolmém na x):

$$A = \pi r^2 ,$$

$$J = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^r (\rho \cos \varphi)^2 \cdot \rho \, \mathrm{d}\rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\varphi)) \, \mathrm{d}\varphi \int_0^R \rho^3 \, \mathrm{d}\rho$$
$$= \frac{1}{2} \left[\varphi + \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^r = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} r^4 = \frac{1}{4} \pi r^4 .$$

Označme σ napětí ve sloupu, ε přetvoření, u posunutí ve směru x a w posunutí ve směru kolmém na x. V tzv. teorii prvního řadu (rovnováha se formuluje na nedeformované konstrukci) je $w = 0$ a stav napjatosti a přetvoření je určen Cauchyho podmínkou rovnováhy, Hookovým zákonem a vztahem mezi posunutím a přetvořením:

$$\sigma' = 0 , \qquad \sigma = E\varepsilon , \qquad \varepsilon = u' .$$

2.11 Výtok otvorem ve svislé stěně

Stanovte nejmenší možný výtok Q_1 a největší možný výtok Q_2 eliptickým otvorem o obsahu A ve svislé stěně, který je celý pod vodní hladinou, přičemž hlavní či vedlejší osa elipsy je svislá, působí-li na otvor i hladinu stejné tlaky a vliv přítokové rychlosti je zanedbatelný. Jsou známy výška vodní hladiny nad středem otvoru h, gravitační zrychlení g, součinitel zúžení ε a součinitel výtokové rychlosti φ.

Řešení: Ve svislé stěně zaveďme kartézskou soustavu souřadnic (x, y) tak, že osa y je svislá a počátek souřadnic je ve středu otvoru. Eliptický otvor Ω je v ní popsán nerovnicí

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\,,$$

přičemž a a b jsou délky hlavní a vedlejší poloosy hraniční elipsy (na tom, která z nich je hlavní, nezáleží). Podle zadání musí být navíc $A = \pi ab$ a $b \leq h$.

Pro výtokovou rychlost v, jež je funkcí y, platí podle zákona zachování energie (konkrétně přeměny potenciální energie v kinetickou)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{v(y)}{\varphi}\right)^2 = g(h-y)\,,$$

což lze zapsat ve tvaru

$$v(y) = \varphi\sqrt{2g(h-y)}\,,$$

jejž znal (pro $\varphi = 1$) již J. E. Toricelli v 17. století. Celkový výtok otvorem potom je

$$Q = \int\!\!\int_\Omega v(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

a pro označení $c = \varepsilon\varphi\sqrt{2g}$ tedy

$$Q = \frac{2ca}{b}\int_{-b}^{b}\sqrt{h-y}\sqrt{b^2-y^2}\,\mathrm{d}y = 2ca\sqrt{h}\int_{-b}^{b}\sqrt{1-\frac{y}{h}}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}y\,.$$

Označme ještě $\xi = b/h$; má-li být celý otvor pod hladinou, musí platit $\xi \in \langle 0, 1\rangle$. Substitucí $y = b\cos\psi$ dostáváme

Děkuji za pozornost!