PROBLÉM IDENTIFIKACE ROVINY

Josef Dalík[1]

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební,
Ústav matematiky a deskriptivní geometrie,
Žižkova 17, 602 00 Brno
e–mail: dalik.j@fce.vutbr.cz

Abstrakt

V příspěvku je popsán postup určení rovnice roviny, v níž leží body $B_1, \ldots, B_m$. O těchto bodech je známo jednak, že pro každý index i leží bod B_i na polopřímce, která vychází z daného bodu A_i ve směru daného vektoru $\vec{v}^i$ a jednak, že pro některé dvojice indexů i, j je zadaná vzdálenost mezi body B_i a B_j. Účinnost popsaného postupu je dokumentovaná na příkladu.

1 Formulace úlohy a motivace

Úloha. Pro dané celé kladné číslo m, body $A_1, \ldots, A_m$ z $\mathbf{E}_3$, vektory $\vec{v}^1, \ldots, \vec{v}^m$ v $\mathbf{E}_3$, množinu $M = \{1, \ldots, m\}$, podmnožinu G neuspořádaného součinu $M\&M$ a pro zobrazení $d : G \longrightarrow \mathbf{R}^+$ najděte rovnici roviny ϱ takové, že polopřímka p^i určená bodem A_i a směrovým vektorem $\vec{v}^i$ se s rovinou ϱ protíná v bodě B_i pro $i = 1, \ldots, m$ a vzdálenost $d(B_i, B_j)$ mezi body B_i a B_j je rovna $d(i\&j)$ pro všechny dvojice $(i\&j)$ z množiny G.

Tato úloha vznikla z potřeby softwarové firmy, vytvářející programové prostředky pro grafickou podporu přímých televizních přenosů sportovních utkání. O bodech $A_1, \ldots, A_m$ a směrových vektorech $\vec{v}^1, \ldots, \vec{v}^m$ předpokládáme, že byly získány na jednom stanovišti televizní kamery. Tyto kamery jsou schopny velmi přesně určit *výchozí (pozorovací) bod* A_i a *směr zaměření* – vektor $\vec{v}^i$. Změna směru zaměření kamery způsobí i malou změnu výchozího bodu, takže dané výchozí body $A_1, \ldots, A_m$ jsou vzájemně různé, i když leží relativně velmi blízko sebe. Každá polopřímka daná bodem A_i a vektorem $\vec{v}^i$ vznikla zaměřením kamery na význačný bod B_i hrací plochy. Vzdálenosti $d(i\&j)$ pro $(i\&j) \in G$ byly naměřeny na povrchu hrací plochy mezi vybranými význačnými body B_i, B_j.

[1]Podpořeno grantem MSM 261100007

Znalost rovnice roviny ϱ je nutným předpokladem pro určování bodů hrací plochy, na něž je kamera právě zaměřena a pro řešení různých metrických úloh na hrací ploše. Například při přenosech fotbalových utkání jde o určení vzdálenosti daného bodu hrací plochy od branky, znázornění minimální vzdálenosti zdi od míče při trestných kopech, vyznačení úrovně postavení mimo hru a podobně.

Samozřejmě, že všechny naměřené hodnoty jsou zatíženy chybou měření. Navíc hrací plocha není ideální rovinou a vzdálenosti jsou tedy měřeny po nerovném povrchu. Proto ani od řešení nelze požadovat přesné splnění daných podmínek a úlohu je nutno řešit přibližně užitím numerických metod.

2 Postup řešení úlohy

Našim úkolem je najít koeficienty a, b, c, d tak, aby se rovina $\varrho : \ ax + by + cz + d = 0$ s polopřímkami p^i protínala, tj. aby body B_i tvaru $A_i + \tau_i \vec{v}^i$, ležící v rovině ϱ, měly parametry $\tau_i \geq 0$ a aby $d(B_i, B_j) = d(i\&j)$ pro všechna $(i\&j) \in G$. Vzhledem k výše zdůvodněným předpokládaným chybám ve vstupních datech nelze přesné splnění všech těchto podmínek požadovat. Například posledně uvedenou podmínku lze nahradit slabším požadavkem, aby součet

$$\sum_{(i\&j)\in G} [d(B_i, B_j) - d(i\&j)]^2 \tag{1}$$

byl minimální. Protože parametry $\tau_1, \ldots, \tau_m$ závisí na koeficientech a, b, c, d, jde o úlohu najít globální minimum funkce (1) proměnných a, b, c, d. Úlohy tohoto typu lze řešit velmi efektivně, podaří-li se najít počáteční aproximaci proměnných dostatečně blízko jejich přesných hodnot. V níže popsaném postupu nepožadujeme přesné splnění podmínky $B_i \in p^i$ pro $i = 1, \ldots, m$. Úspěch a efektivnost metody jsou založeny na nalezení co nejlepší nulté aproximace vektoru neznámých.

Postup je rozdělen do kroků I – IV. Kroky I a II jsou věnovány konstrukci nulté aproximace parametrů určujících rovinu ϱ dostatečně blízko přesného řešení, v kroku III je nultá aproximace postupně zpřesňována tak, aby součet druhých mocnin vzdáleností aproximací bodů z jisté podmnožiny v množině $\{B_1, \ldots, B_m\}$ od příslušných polopřímek byl co nejmenší. V kroku IV je získaný výsledek transformován do požadovaného tvaru. Terminologie teorie grafů je převzata z knihy Busacker, Saaty [1].

I. Určíme podgraf (N, H) grafu (M, G) takto: V grafu (M, G) zvolíme podgraf (N_3, H_3) s tříprvkovou množinou vrcholů, který je úplným grafem a postupně pro $i = 4, 5, \ldots$ hledáme vrchol $j_i \in N - N_{i-1}$, pro který existují dva různé vrcholy $j_p, j_q \in N_{i-1}$ s vlastností $\{(j_i\&j_p), (j_i\&j_q)\} \subseteq G$. Pak položíme $N_i = N_{i-1} \cup \{j_i\}$ a $H_i = H_{i-1} \cup \{(j_i\&j_p), (j_i\&j_q)\}$. Konstrukci ukončíme pro index $i = k$, pro nějž je každý vrchol $j \in N - N_k$ spojen hranou z množiny G s nejvýše jedním vrcholem z N_k. Pak položíme $N = N_k$ a $H = H_k$.

Ke grafu (N, H) přiřadíme geometrický graf s množinou vrcholů vytvořenou z bodů roviny x, y takto: K vrcholu j_1 z množiny $N_3 = \{j_1, j_2, j_3\}$ přiřadíme libovolný bod C_1, k vrcholu j_2 přiřadíme bod C_2 tak, aby $d(C_1, C_2) = d(j_1\&j_2)$ a k vrcholu j_3 přiřadíme bod C_3 tak, aby $d(C_1, C_3) = d(j_1\&j_3)$, $d(C_2, C_3) = d(j_2\&j_3)$ a aby točivost uspořádané trojice bodů (C_1, C_2, C_3) byla stejná jako točivost uspořádané trojice vektorů $(\vec{v}^{j_1}, \vec{v}^{j_2}, \vec{v}^{j_3})$. Dále pro $i = 4, 5, \ldots, k$ k vrcholu $j_i \in N - N_{i-1}$ přiřadíme bod C_i takový, že $d(C_i, C_p) = d(j_i\&j_p)$, $d(C_i, C_q) = d(j_i\&j_q)$ pro $(j_i\&j_p), (j_i\&j_q) \in H$ a $p < i, q < i$. Navíc požadujeme, aby točivosti uspořádaných trojic bodů (C_i, C_p, C_q) a vektorů $(\vec{v}^{j_i}, \vec{v}^{j_p}, \vec{v}^{j_q})$ byly stejné.

II. V množině bodů $C_1, \ldots, C_k$ najdeme "velký" trojúhelník $\overline{C_u C_v C_w}$ a určíme ortogonální transformaci $X \mapsto S_0 X + T_0$ takovou, že $S_0 C_i + T_0 \in p^{j_i}$ pro $i = u, v, w$. Zkušenosti ukazují, že existují vždy dvě ortogonální transformace s touto vlastností. Z těchto dvou transformací je jedna *vyhovující* a druhá *nevyhovující*. Vyhovující je transformace, pro niž má součet druhých mocnin vzdáleností bodů $S_0 C_i + T_0$ od polopřímek p^{j_i} pro $i = 1, \ldots, k$ menší hodnotu. V testovaných úlohách byla tato hodnota příslušná transformaci vyhovující vždy výrazně menší, než hodnota příslušná transformaci nevyhovující.

III. Ortogonální transformaci $X \mapsto S_0 X + T_0$ z kroku II použijeme jako nultou aproximaci v procesu hledání ortogonální transformace $X \mapsto SX + T$, pro niž je součet druhých mocnin vzdáleností bodů $SC_i + T$ od přímek p^{j_i} pro $i = 1, \ldots, k$ minimální. Protože třetí souřadnice bodů $C_1, \ldots, C_k$ jsou vesměs rovny nule, nezáleží na hodnotách ve třetím sloupci matice S. Jelikož druhá mocnina vzdálenosti bodu $SC_i + T$ od přímky p^{j_i} je rovna

$$\frac{1}{|\vec{v}^{j_i}|^2} \left| \vec{v}^{j_i} \times (SC_i + T - A_{j_i}) \right|^2$$

a položíme-li $S = (s_{ij})_{i,j=1}^3$, $T = (t_1, t_2, t_3)$, jde o úlohu minimalizovat výraz

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{|\vec{v}^{j_i}|^2} \left| \vec{v}^{j_i} \times (SC_i + T - A_{j_i}) \right|^2$$

za předpokladu, že matice S je ortogonální. Řešení této úlohy metodou Lagrangeových multiplikátorů, viz například Vogel [2], tedy spočívá v určení koeficientů $s_{11}, s_{21}, s_{31}, s_{12}, s_{22}, s_{32}, t_1, t_2, t_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tak, aby součet

$$\begin{aligned} F &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{|\vec{v}^{j_i}|^2} \left| \vec{v}^{j_i} \times (SC_i + T - A_{j_i}) \right|^2 + \lambda_1(s_{11}^2 + s_{21}^2 + s_{31}^2 - 1) \qquad (2) \\ &+ \lambda_2(s_{12}^2 + s_{22}^2 + s_{32}^2 - 1) + \lambda_3(s_{11}s_{12} + s_{21}s_{22} + s_{31}s_{32}) \end{aligned}$$

byl minimální. Nutnou podmínkou pro minimum F je splnění soustavy rovnic

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{pro} \quad x = s_{11}, s_{21}, s_{31}, s_{12}, s_{22}, s_{32}, t_1, t_2, t_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3.$$

Tento systém 12 nelineárních rovnic pro dvanáct neznámých je řešen Newtonovou metodou s nultými aproximacemi neznámých s_{ij} a t_i rovnými odpovídajícím prvkům matice S_0 a souřadnicím bodu T_0. Výsledkem jsou známé první dva sloupcové vektory ortogonální matice S a souřadnice bodu T.

IV. Na základě známé transformace $A \mapsto SA + T$ roviny x, y na rovinu ϱ odvodíme obecnou rovnici roviny ϱ:

Označme $X = (x, y, z)$ libovolný bod roviny ϱ, $A = (\alpha, \beta, 0)$ libovolný bod roviny x, y a $\vec{s}^1, \vec{s}^2$ postupně první a druhý sloupcový vektor matice S. Pak $X = SA + T$ je ekvivalentní s $X - T = \alpha\vec{s}^1 + \beta\vec{s}^2$ pro libovolná $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ a to je ekvivalentní s obecnou rovnicí ϱ : $(X - T) \cdot (\vec{s}^1 \times \vec{s}^2) = 0$.

Pro indexy $i \in M - N$ určíme body B_i jako průsečíky $p^i \cap \varrho$.

3 Příklad

V níže uvedené Tabulce 1 je dáno 11 bodů A_i a vektorů $\vec{v}^i$.

i	A_i	$\vec{v}^i$
1	(-0.048617,0.262064,-0.067704)	(-0.555845,-0.303095,-0.774060)
2	(-0.021501,0.267123,-0.061709)	(-0.319595,-0.237628,-0.917274)
3	(-0.030148,0.270355,-0.040305)	(-0.588864,-0.183028,-0.787236)
4	(-0.026622,0.270884,-0.039217)	(-0.553241,-0.172362,-0.814994)
5	(-0.040331,0.268805,-0.041738)	(-0.679235,-0.211055,-0.702919)
6	(-0.051897,0.267051,-0.040194)	(-0.767756,-0.238696,-0.594622)
7	(-0.036034,0.267018,-0.055027)	(-0.531929,-0.239184,-0.812307)
8	(-0.025207,0.270119,-0.045002)	(-0.480008,-0.187566,-0.856978)
9	(-0.000078,0.268898,-0.057609)	(-0.001327,-0.209489,-0.977810)
10	(0.000146,0.267276,-0.064718)	(0.002193,-0.235339,-0.971911)
11	(0.001927,0.256891,-0.098124)	(0.018341,-0.356881,-0.933970)

Tabulka 1

Bylo naměřeno 19 vzdáleností mezi význačnými body na ploše. V každé z níže uvedených uspořádaných dvojic je první složkou neuspořádaná dvojice indexů $(i\&j)$ a druhou je vzdálenost $d(i\&j)$:

$$
\begin{array}{llll}
((3\&4),7.42) & ((4\&5),16.48) & ((5\&6),13.79) & ((6\&7),21.54) \\
((5\&7),16.48) & ((4\&8),11.66) & ((3\&8),11.66) & ((8\&2),23.8) \\
((8\&7),20.85) & ((7\&2),15.875) & ((7\&1),15.1) & ((1\&2),23.3) \\
((1\&6),22.52) & ((1\&11),30) & ((2\&11),30) & ((2\&10),22.08) \\
((2\&9),25.42) & ((9\&10),9.1) & ((10\&11),24.81) &
\end{array}
$$

V tomto příkladu je graf (N, H) totožný s původním grafem (M, G). Body příslušného geometrického grafu a jejich souřadnice v rovině x, y jsou uvedeny v Tabulce 2 v pořadí vkládání do množiny N.

i	C_i	j_i
1	(0,0)	1
2	(23.3,0)	2
3	(11.134858,-10.199262)	7
4	(-7.327752,-21.294470)	6
5	(27.210863,-23.476481)	8
6	(11.650000,27.645569)	11
7	(5.717983,-25.763576)	5
8	(34.839046,18.824899)	10
9	(20.513765,-33.021347)	4
10	(43.413049,15.544827)	9
11	(16.111451,-27.048405)	3

Tabulka 2

Algoritmus pro výběr "velkého" trojúhelníka s vrcholy z množiny $\{C_1, \ldots, C_{11}\}$ vybral trojúhelník $\overline{C_6C_9C_{10}}$ a byly nalezeny dvě ortogonální transformace, které vrchol C_6 zobrazují na přímku p^{11}, C_9 na p^4 a C_{10} na p^9. V Tabulce 3 jsou pro stručnost uvedeny jen hodnoty parametrů $\tau_{11}, \tau_4, \tau_9$ obrazů bodů C_6, C_9, C_{10} v obou nalezených transformacích.

transformace	τ_{11}	τ_4	τ_9
1	96.020131	71.702751	102.932540
2	96.585740	86.531654	54.200201

Tabulka 3

Součet druhých mocnin vzdáleností bodů, které vzniknou z $C_1, \ldots, C_{11}$ ortogonální transformací číslo 1 postupně od polopřímek $p^{j_1}, \ldots, p^{j_{11}}$ je roven 72.07 a stejný součet příslušný ortogonální transformaci číslo 2 je roven

13.28. Za nultou aproximaci hledané ortogonální transformace roviny x, y byla tedy vzata ortogonální transformace číslo 2. S touto nultou aproximací bylo hledáno minimum součtu (2) Newtonovou metodou. Hodnoty i–té aproximace prvních devíti složek vektoru neznámých $\vec{u} = (s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}, s_{31}, s_{32}, t_1, t_2, t_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ pro $i = 0, \ldots, 3$ jsou uvedeny v Tabulce 4.

i	s_{11}	s_{12}	s_{21}	s_{22}	s_{31}	s_{32}	t_1	t_2	t_3
0	.325	.945	.023	-.041	-.945	.324	-28.9	-18.2	-48.7
1	.377	.928	.046	.0004	-.927	.378	-30.0	-15.8	-40.6
2	.378	.926	.005	.0005	-.926	.378	-30.0	-15.8	-40.5
3	.378	.926	.005	.0005	-.926	.378	-30.0	-15.8	-40.5

Tabulka 4

Odpovídající údaje o hodnotách Lagrangeových multiplikátorů a o euklidovské normě rozdílu mezi i–tou a $(i-1)$–ní aproximací vektoru neznámých jsou v Tabulce 5.

i	λ_1	λ_2	λ_3	$\|\vec{u}^i - \vec{u}^{i-1}\|$
0	1	1	1	
1	19.642009	-37.160763	-48.746185	65.964142
1	17.103807	-34.537169	-51.814753	4.769724
2	17.098362	-34.528441	-51.818366	0.010903
3	17.098362	-34.528441	-51.818366	0.00000004

Tabulka 5

Z tabulek 4 a 5 je zřejmé, že použitá nultá aproximace prvních devíti složek vektoru $\vec{u}$ je velmi dobrým odhadem. Velký rozdíl mezi nultou a první aproximací vektoru neznámých $\vec{u}$ je způsoben volbou nultých aproximací Lagrangeových multiplikátorů $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Transformací popsanou v kroku IV vznikne rovnice roviny

$$0.002449x - 0.999986y - 0.004723z - 15.8798 = 0.$$

Součet druhých mocnin vzdáleností bodů $SC_1+T, \ldots, SC_{11}+T$ postupně od přímek $p^{j_1}, \ldots, p^{j_{11}}$ je roven 4.175, zatímco stejný součet příslušný nulté aproximaci je 13.28. Z poměrně velké výsledné hodnoty tohoto součtu usuzuji, že původní body $B_1, \ldots, B_{11}$, mezi nimiž byly vzdálenosti měřeny, neleží v jedné rovině.

4 Závěr

Popsaný postup řešení úlohy považuji za ukázku účinnosti elementárních metod lineární algebry a základních prostředků pro numerické řešení soustav nelineárních rovnic. Aproximace plochy rovinou není v řadě případů dostatečně výstižná. I v uvedeném příkladu se vyšetřovaná plocha zřejmě poměrně značně liší od roviny, takže důležitým zobecněním zkoumané úlohy je problém najít rovnici obecnější plochy, na níž body $B_1, \ldots, B_m$ leží. Další prakticky důležitým případem je řešení úlohy za předpokladu, že v daném grafu (M, G) neexistuje úplný tříprvkový podgraf.

Numerické výpočty byly prováděny programovým systémem MAPLE.

Reference

[1] Busacker, R.G., Saaty, T.L. Konečné grafy a sítě: Úvod a aplikace (v ruštině). Nauka, Moskva, 1974.

[2] Vogel, C.R. Computational Methods for Inverse Problems. SIAM, Philadelphia, 2002.