

Známe všechno o kvadratické rovnici?

Jaroslav Beránek

Tento příspěvek je věnován několika poznámkám o řešení kvadratických rovnic. Proč zrovna toto téma? Na první pohled se jeví daná problematika jako zcela prozkoumaná a ve všech učebnicích matematiky středních škol velmi podrobně popsána. Jdeme-li však do hloubky, lze nalézt i v řešení kvadratické rovnice některé aspekty, které buďto nejsou známe takřka vůbec nebo je jejich zdůvodňování podceňováno. Např. mnozí studenti zaváhají s odpovědí na otázku, zda platí běžně známý vzorec pro řešení kvadratické rovnice s reálnými koeficienty i pro kvadratické rovnice s koeficienty komplexními; pokud již správně odpovědí, že platí, pak většinou nedovedou tento fakt zdůvodnit. Další zajímavé vztahy mezi kořeny a koeficienty, které v příspěvku budou uvedeny, lze dokázat pouze pomocí matematických znalostí obsažených až v učivu matematiky na vysokých školách. Proto má smysl se řešením kvadratické rovnice zabývat i na vysokých školách, kde toto poměrně nenáročné téma můžeme využít k rozvoji myšlení studentů i k jejich samostatné tvůrčí činnosti (o problémovém vyučování již bylo napsáno velmi mnoho a není zde účelné se těmito otázkami podrobně zabývat, viz např. [3]).

Nejprve se budeme věnovat odvození vztahu pro řešení kvadratické rovnice s komplexními koeficienty. Toto odvození je sice podrobně popsáno v [1], zde je však z metodických důvodů uvedeme rovněž. Nechť

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

je kvadratická rovnice, kde a, b, c jsou komplexní čísla a platí $a \neq 0$. Nyní rovnici (1) upravíme na ekvivalentní tvar

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \quad (2)$$

(úprava se provádí doplněním na „úplný čtverec“ a je zaváděna už na střední škole).

V rovnici (2) označíme $y = 2ax + b$, $D = b^2 - 4ac$. Rovnice (2) pak přejde do tvaru

$$y^2 = D, \quad \text{kde } y, D \text{ jsou čísla komplexní.} \quad (3)$$

Poslední rovnice je rovnice binomická. Komplexní číslo D vyjádříme v goniometrickém tvaru: $D = |D|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, rovnice (3) pak má obecné řešení určené vztahem:

$$y_k = \sqrt{|D|} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{2} \right), \quad k = 0, 1.$$

Po dosazení za k platí: $y_0 = \sqrt{|D|} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$, $y_1 = \sqrt{|D|} \left(\cos \frac{\alpha + 2\pi}{2} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi}{2} \right) =$

$$= \sqrt{|D|} \left[\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \pi \right) \right] = \sqrt{|D|} \left(-\cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2} \right) = -\sqrt{|D|} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

Pomocí Moivreovy věty se snadno přesvědčíme, že oba odvozené vztahy pro y_0, y_1 vyjadřují dvě druhé odmocniny z komplexního čísla D , které se i v tomto případě nazývá diskriminant.

$$\text{Platí tedy } \sqrt{D} = \pm \sqrt{|D|} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right). \quad (4)$$

Dosazením vztahu (4) do rovnice (3) dostaneme vztah $2ax + b = \pm \sqrt{|D|} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$,

kteřý lze zkráceně psát $2ax + b = \pm \sqrt{D}$. Odtud plyne známý vztah $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Vidíme, že tento vztah tedy platí pro reálné i komplexní koeficienty kvadratické rovnice (1). Uvažujme nyní o tom, zda i v případě, že D je reálné číslo, požímané jako prvek množiny

komplexních čísel, odvozený vzorec „funguje“. Je-li $D = 0$, je také $|D| = 0$, tj. ze (4) plyne $\sqrt{D} = 0$ a máme $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$. Je-li $D > 0$, potom $\alpha = 0$ a ze (4) dostáváme $\sqrt{D} = \pm \sqrt{D}$, což

odpovídá klasické definici druhé odmocniny nezáporného čísla; potom $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Nechť nyní je $D < 0$, pak platí $\alpha = \pi$, což po dosazení do (4) dává $\sqrt{D} = \pm i\sqrt{|D|}$; odtud již

plyne $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$. Ve všech případech tedy vidíme, že všeobecně známý vztah pro

kořeny kvadratické rovnice platí pro libovolné koeficienty této rovnice.

Další poznámky se týkají vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice. Je opět všeobecně už pro středoškoláky známo, že v rovnici (1), jejíž koeficienty jsou reálná čísla, platí pro její kořeny vztahy $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Otázkou však je, zda tyto vztahy platí i

v případě, že rovnice (1) má koeficienty komplexní. Z obecné teorie polynomů nad tělesem komplexních čísel je kladná odpověď známá (dokonce v obecném případě polynomů libovolného stupně, kde uvedené vztahy jsou speciálním případem pro kvadratický polynom - studenti vysokých škol mohou tuto odpověď vyhledat v literatuře, např. [4], jako řešení jisté problémové situace), praktické ověření rozepsáním s využitím (4) je však pro studenty i vysoké školy mnohdy nesnadným úkolem. Rovněž využití těchto vztahů je v obecném případě mnohdy spojeno s dalšími obtížnými úkoly, např. s využitím symetrických polynomů. Uvedeme příklad.

Příklad: Nechť a, b, c, d jsou libovolná reálná čísla. Dokažte, že kořeny kvadratické rovnice $x^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd)x + (ad - bc)^3 = 0$ jsou třetími mocninami kořenů kvadratické rovnice $x^2 - (a + d)x + (ad - bc) = 0$.

Kořeny druhé z rovnic označme x_1, x_2 . Víme, že platí $x_1 + x_2 = a + d$, $x_1 x_2 = ad - bc$. Chceme dokázat, že první z rovnic má kořeny x_1^3, x_2^3 . Stačí tedy ověřit platnost vztahů $x_1^3 + x_2^3 = a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd$, $x_1^3 x_2^3 = (ad - bc)^3$. Druhý ze vztahů je zřejmý; zaměříme se tedy na ověření vztahu prvního. Z teorie symetrických polynomů plyne:

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2 x_2 - 3x_1 x_2^2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$. Nyní dosadíme: $x_1^3 + x_2^3 = (a + d)^3 - 3(ad - bc)(a + d) = a^3 + 3a^2 d + 3ad^2 + d^3 - 3a^2 d - 3ad^2 + 3abc + 3bcd = a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd$. Reálná čísla x_1^3, x_2^3 jsou tedy kořeny první ze zadaných kvadratických rovnic. Poznamenejme, že celý příklad zůstává v platnosti i v případě, jsou-li a, b, c, d čísla komplexní.

Nyní následují dvě tvrzení obsahující vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice, které již běžně známé nejsou. První z nich je aplikací známých tvrzení o kořenech algebraických rovnic s racionálními koeficienty, druhé popisuje kořeny v jistém speciálním případě koeficientů kvadratické rovnice.

Tvrzení 1: Nechť v rovnici (1) $ax^2 + bx + c = 0$ jsou a, b, c lichá celá čísla. Pak daná kvadratická rovnice (1) nemá celočíselné ani racionální kořeny.

Důkaz: Nechť r je celočíselný kořen rovnice (1). Pak číslo r je dělitelem lichého absolutního členu c , tedy také r musí být lichým číslem. To je však spor, neboť po dosazení lichého kořene r do rovnice (1) dostaneme součet tří lichých čísel, který se nemůže rovnat nule.

Nechť nyní $\frac{p}{q}$ je kořenem (1), kde $q \neq 0$ a $\text{NSD}(p, q) = 1$. Pak podobně jako výše p je dělitelem čísla c a současně q je dělitelem čísla a , tj. obě čísla p, q jsou lichá. Po dosazení do (1) máme $\frac{ap^2}{q^2} + \frac{bp}{q} + c = 0$, odtud $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$, což je spor, protože poslední vztah je součtem tří lichých čísel, který se rovná nule.

Tvrzení 2: Necht' je dána kvadratická rovnice (1) $ax^2 + bx + c = 0$, kde $abc \neq 0$. Pak platí:

$$(i) \quad x_1 = 1 \wedge x_2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a + b + c = 0,$$

$$(ii) \quad x_1 = -1 \wedge x_2 = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow a - b + c = 0.$$

Důkaz: (i) Necht' $a + b + c = 0$, pak $a + c = -b$. Po dosazení do vztahu pro kořeny kvadratické rovnice dostaneme $x_{1,2} = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2}}{2a} = \frac{(a+c) \pm |a-c|}{2a}$. V případě $a > c$ platí $x_{1,2} = \frac{(a+c) \pm (a-c)}{2a}$, tedy po úpravě tvrzení (i) platí. V případě $a = c$ máme $x_{1,2} = 1$, což opět odpovídá tvrzení (i), neboť v tomto případě oba kořeny splynou. V posledním případě $a < c$ dostáváme po dosazení $x_{1,2} = \frac{(a+c) \pm (c-a)}{2a}$, což opět vede ke kořenům 1 a $\frac{c}{a}$.

Naopak, necht' kvadratická rovnice (1) má kořeny 1 a $\frac{c}{a}$. Po dosazení kořene 1 do rovnice

(1) platí $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0$, tzn. $a + b + c = 0$. Dosadíme-li do (1) kořen $\frac{c}{a}$, dostaneme vztah

$a \frac{c^2}{a^2} + b \frac{c}{a} + c = 0$, který po vynásobení číslem a^2 (podle předpokladu $a \neq 0$) lze upravit na tvar $ac(c + b + a) = 0$. Protože podle předpokladu jsou čísla a, c nenulová, musí platit $a+b+c=0$.

(ii) Dokáže se zcela analogicky.

Právě dokázané tvrzení poskytuje pro studenty náměty pro jejich samostatnou práci. Lze zkoumat, zda i v případě jiných vazebních podmínek pro koeficienty kvadratické rovnice platí nějaké analogické vztahy pro její kořeny. např. je možné se zabývat otázkou, zda není možné v předchozím tvrzení vynechat předpoklad $b \neq 0$; zvolíme-li v případě (i) $b = 0$, pak při zachování předpokladu $a + b + c = 0$ nutně platí $a = -c$, tzn. rovnice (1) přejde do tvaru $ax^2 - a = 0$. Tato rovnice má triviální řešení ($a \neq 0$) $x_{1,2} = \pm 1$, které odpovídá tvrzení (i). Naprosto analogická situace vznikne i v případě (ii). Lze tedy konstatovat, že předpoklad $b \neq 0$ lze v předchozím tvrzení vypustit. Ponechání tohoto předpokladu je vedeno pouze snahou o eliminaci triviálního řešení tak, aby rovnice (1) byla úplnou kvadratickou rovnicí.

I když uvedená tvrzení o kvadratické rovnici nejsou z matematického hlediska nijak mimořádná a jejich význam je diskutabilní, má smysl se těmito a podobnými problémy zabývat při výchově budoucích učitelů matematiky. Zde nejde jen o čistě matematický

význam dokazovaných tvrzení či o to, zda jsou původní. Cílem by mělo být poskytovat budoucím učitelům matematiky (ale nejen jim) dostatek témat a problémů k samostatnému řešení. S tímto cílem je uveden tento příspěvek.

LITERATURA

- [1] Calda, E.: *Matematika pro gymnázia - komplexní čísla*. Praha: 2001, Prometheus.
ISBN 80-7196-187-6.
- [2] Dinh Công Vu: *Poznámka o kořenech úplné kvadratické rovnice*. Rozhledy matematicko-fyzikální 52 (1973-74), s. 445-446.
- [3] Hejný, M., a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: 1989, SPN.
ISBN 80-08-01344-3.
- [4] Horák, P.: *Polynomy*. Brno: UJEP Brno (učební text), 1978, 128 s., ISBN 55-033-78.
- [5] Larson, L. C. *Metódy riešenia matematických problémov*. Bratislava: 1990, Alfa.
ISBN 80-05-00627-6.

RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.
katedra matematiky
Pedagogická fakulta MU v Brně
Poříčí 31, 603 00 Brno
tel.: 549491673
e-mail: Beranek@ped.muni.cz