

ŘEŠENÍ STOCHASTICKÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC EULEROVOU METODOU

Edita Kolářová¹

Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií
VUT Brno, Technická 8, Česká republika
mail: kolara@feec.vutbr.cz

I. Úvod

Stochastické diferenciální rovnice používáme k popisu fyzikálních jevů včetně náhodných vlivů. Řešením stochastického modelu je náhodný proces. V tomto příspěvku ukážeme, jak lze takové řešení získat pomocí Eulerovy numerické metody a uvedeme příklad konkrétní stochastické rovnice, kterou jsme vyřešili Eulerovou metodou pomocí programu Maple.

II. Stochastická Eulerova metoda

Uvažujme stochastickou diferenciální rovnici na intervalu $\langle 0, T \rangle$, $T > 0$

$$dX(t) = a(t, X(t)) dt + b(t, X(t)) dW(t), \quad X(0) = X_0,$$

kde proces $W(t)$ je Brownův pohyb a funkce $a, b : \langle 0, T \rangle \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojitě. Při numerickém hledání Itôva řešení této rovnice můžeme použít tzv. explicitní Eulerovu metodu:

$$X_{n+1} = X_n + a(t_n, X_n)\Delta_n + b(t_n, X_n)\Delta W_n,$$

kde $\Delta_n = t_{n+1} - t_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} ds$ a $\Delta W_n = W(t_{n+1}) - W(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} dW(s)$.

Tato metoda je v souladu s definicí Itôva integrálu, při které se integrální součty počítají z funkčních hodnot integrované funkce v levém krajním bodě subintervalu, na rozdíl od Riemann-Stieltjesova integrálu, kde při výpočtu integrálního součtu můžeme brát libovolný bod subintervalu. Aproximace řešení pomocí Eulerovy metody při zmenšujícím se Δ_n konverguje k přesnému Itôvu řešení, tato konvergence však není příliš rychlá.

Na měření rychlosti konvergence stochastických numerických metod existují různé přístupy. Říkáme, že metoda má silný řád konvergence γ , jestliže platí:

$$E[|X(T) - X^\Delta(N_T)|] \leq K_T \Delta^\gamma,$$

kde $X^\Delta(N_T)$ je příslušná aproximace a $\Delta = \max_{0 \leq n \leq N_T} \Delta_n$.

Při stejném označení definujeme slabý řád konvergence β , jestliže platí:

$$|E[X(T)] - E[X^\Delta(N_T)]| \leq K_T \Delta^\beta.$$

Stochastická Eulerova metoda má silný řád konvergence $\gamma = \frac{1}{2}$ a slabý řád konvergence $\beta = 1$.

¹Tento příspěvek je součástí řešení výzkumného záměru č. 201/03/0570.

III. Příklady

Uvažujme elektrický RL obvod, kde rezistor a cívka jsou zapojeny sériově. Označme R odpor rezistoru, L indukčnost cívky a $U(t)$ zdroj napětí v čase t . Nechť je napětí na pravé straně ovlivněno náhodnými vlivy. Proud v obvodu v tomto případě splňuje stochastickou diferenciální rovnici

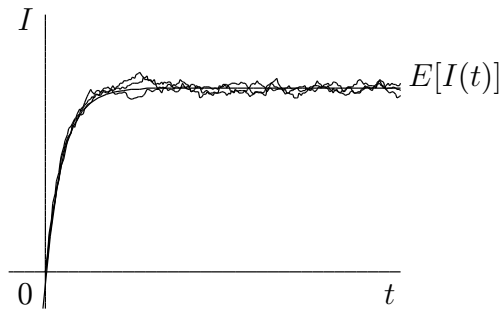
$$dI(t) = \left(\frac{1}{L} U(t) - \frac{R}{L} I(t) \right) dt + \frac{\alpha}{L} dW(t), \quad I(0) = I_0.$$

Uvažujme teď RL obvod, kde odpor může mít náhodné hodnoty. Stochastická diferenciální rovnice v tomto případě bude mít tvar (α konstanta):

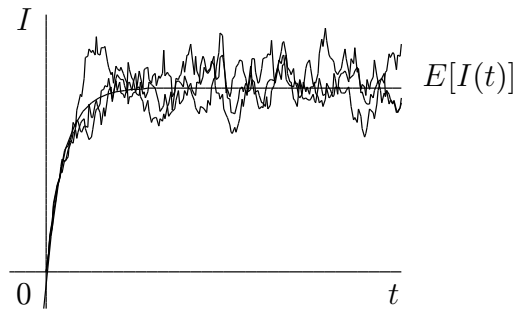
$$dI(t) = \frac{1}{L}(U(t) - RI(t)) dt - \frac{\alpha}{L} I(t) dW(t), \quad I(0) = I_0.$$

Dále uvedeme dva obvody, kde jsme stochastické řešení získané Eulerovou metodou nakreslili v Maplu. Uvažovali jsme daný obvod nejdříve se stochastickým zdrojem a pak se stochastickým odporem.

1. Jednoduchý RL obvod obsahuje rezistor o odporu $R = 1000 \Omega$, cívku s indukčností $L = 200 H$ a ideální baterii o elektromotorickém napětí $U = 12V$, kde na počátku byl nulový proud $I_0 = 0$. Nakreslili jsme do jednoho obrázku vždy tři trajektorie řešení. Je tady dobře vidět, že v případě, kdy L, R a U jsou konstanty, stejný „šum“ ($\alpha = 1$) ve zdroji způsobí menší defekt v řešení než stejný „šum“ v odporu. ($E[I(t)]$ se splývá s deterministickým řešením.)

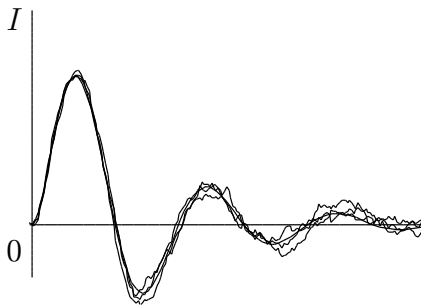


Řešení se stochastickým zdrojem

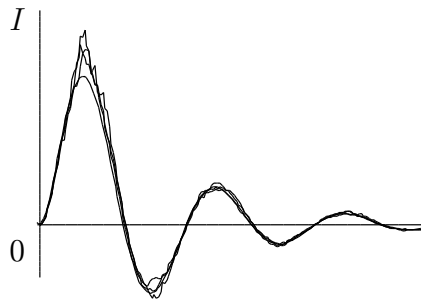


Řešení se stochastickým odporem

2. Uvažujme obvod se stejnými parametry jako v 1. kromě baterie, kde změníme napětí na $U = 100 e^{-2t} \sin 10t V$, $I_0 = 0$.



Řešení se stochastickým zdrojem



Řešení se stochastickým odporem

Literatura

Cyganowski, S., Kloeden, P., Ombach, J.: From Elementary Probability to Stochastic Differential Equations with Maple, Springer-Verlag, 2002