Příklad. Najdeme v množině $\mathbb{R}$ řešení následujících kvadratických nerovnic:

a) $-x^2 - 2x + 3 < 0$;

b) $x^2 - x + 1 < 0$;

c) $-3x^2 + 2x - 1 < 0$;

d) $4x^2 - 4x + 1 < 0$.

Příklad. Najdeme v množině $\mathbb{R}$ řešení následujících kvadratických nerovnic:

a) $-x^2 - 2x + 3 < 0$;

b) $x^2 - x + 1 < 0$;

c) $-3x^2 + 2x - 1 < 0$;

d) $4x^2 - 4x + 1 < 0$.

Při řešení kvadratické nerovnice tvaru $ax^2 + bx + c < 0, \; a \neq 0$ v oboru reálných čísel nejprve vypočteme diskriminant $D = b^2 - 4ac$.

- Jestliže $D > 0$, provedeme rozklad kvadratického trojčlenu v kořenové činitele $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$, kde $x_1, \; x_2 \in \mathbb{R}$. Body $x_1, \; x_2$ rozdělí číselnou osu na tři intervaly. Výraz $a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$ mění znaménko jen při průchodu body x_1 a x_2. Řešit nerovnici $ax^2 + bx + c < 0$ tedy znamená zjistit, ve kterých z uvedených intervalů je výraz $a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$ záporný.

Příklad. Najdeme v množině $\mathbb{R}$ řešení následujících kvadratických nerovnic:

a) $-x^2 - 2x + 3 < 0$;

b) $x^2 - x + 1 < 0$;

c) $-3x^2 + 2x - 1 < 0$;

d) $4x^2 - 4x + 1 < 0$.

Při řešení kvadratické nerovnice tvaru $ax^2 + bx + c < 0,\ a \neq 0$ v oboru reálných čísel nejprve vypočteme diskriminant $D = b^2 - 4ac$.

- Jestliže $D > 0$, provedeme rozklad kvadratického trojčlenu v kořenové činitele $ax^2+bx+c = a\cdot(x-x_1)(x-x_2)$, kde $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$. Body $x_1,\ x_2$ rozdělí číselnou osu na tři intervaly. Výraz $a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$ mění znaménko jen při průchodu body x_1 a x_2. Řešit nerovnici $ax^2 + bx + c < 0$ tedy znamená zjistit, ve kterých z uvedených intervalů je výraz $a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$ záporný.
- Je-li $D = 0$, pak $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1)^2$. V tomto případě je řešením nerovnice $ax^2 + bx + c < 0$ pro $a < 0$ množina všech reálných čísel různých od čísla x_1 a pro $a > 0$ prázdná množina, protože kvadrát nemůže být záporný.

Příklad. Najdeme v množině $\mathbb{R}$ řešení následujících kvadratických nerovnic:

a) $-x^2 - 2x + 3 < 0$;
b) $x^2 - x + 1 < 0$;
c) $-3x^2 + 2x - 1 < 0$;
d) $4x^2 - 4x + 1 < 0$.

Při řešení kvadratické nerovnice tvaru $ax^2 + bx + c < 0,\ a \neq 0$ v oboru reálných čísel nejprve vypočteme diskriminant $D = b^2 - 4ac$.

- Jestliže $D > 0$, provedeme rozklad kvadratického trojčlenu v kořenové činitele $ax^2+bx+c = a\cdot(x-x_1)(x-x_2)$, kde $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$. Body $x_1,\ x_2$ rozdělí číselnou osu na tři intervaly. Výraz $a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$ mění znaménko jen při průchodu body x_1 a x_2. Řešit nerovnici $ax^2 + bx + c < 0$ tedy znamená zjistit, ve kterých z uvedených intervalů je výraz $a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$ záporný.
- Je-li $D = 0$, pak $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1)^2$. V tomto případě je řešením nerovnice $ax^2 + bx + c < 0$ pro $a < 0$ množina všech reálných čísel různých od čísla x_1 a pro $a > 0$ prázdná množina, protože kvadrát nemůže být záporný.
- Je-li $D < 0$, je řešením kvadratické nerovnice $ax^2 + bx + c < 0$ buď celá číselná osa a to pro $a < 0$, nebo pro $a > 0$ prázdná množina.

Řešení.

a) Koeficienty jednotlivých členů rovnice $-x^2 - 2x + 3 = 0$ jsou $a = -1,\ b = -2,\ c = 3$.

Řešení.

a) Koeficienty jednotlivých členů rovnice $-x^2 - 2x + 3 = 0$ jsou $a = -1,\ b = -2,\ c = 3.$

Diskriminant $D = b^2 - 4ac =$

Řešení.

a) Koeficienty jednotlivých členů rovnice $-x^2 - 2x + 3 = 0$ jsou $a = -1,\ b = -2,\ c = 3.$
Diskriminant $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 16 > 0.$

Řešení.

a) Koeficienty jednotlivých členů rovnice $-x^2 - 2x + 3 = 0$ jsou $a = -1,\ b = -2,\ c = 3$.

Diskriminant $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 16 > 0$. Rovnice tedy má dva různé reálné kořeny.

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{-2} = \begin{cases} -3; \\ \ \ 1. \end{cases}$$

Proto $-x^2 - 2x + 3 = -(x+3)(x-1)$.

Řešení.

a) Koeficienty jednotlivých členů rovnice $-x^2 - 2x + 3 = 0$ jsou $a = -1$, $b = -2$, $c = 3$.

Diskriminant $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 16 > 0$. Rovnice tedy má dva různé reálné kořeny.

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{-2} = \begin{cases} -3; \\ 1. \end{cases}$$

Proto $-x^2 - 2x + 3 = -(x + 3)(x - 1)$.

Body -3 a 1 rozdělí číselnou osu na intervaly $I_1 = (-\infty, -3)$, $I_2 = (-3, 1)$ a $I_3 = (1, +\infty)$. Dosazením nuly vidíme, že výraz $-x^2 - 2x + 3$ je v intervalu I_2 kladný. Proto v sousedních intervalech bude zkoumaný výraz záporný. Nerovnici $-x^2 - 2x + 3 < 0$ tedy splňují právě všechna čísla z intervalů I_1 a I_3.

Řešení.

a) Koeficienty jednotlivých členů rovnice $-x^2 - 2x + 3 = 0$ jsou $a = -1,\ b = -2,\ c = 3.$

Diskriminant $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 16 > 0$. Rovnice tedy má dva různé reálné kořeny.

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{-2} = \begin{cases} -3; \\ 1. \end{cases}$$

Proto $-x^2 - 2x + 3 = -(x+3)(x-1)$.

Body -3 a 1 rozdělí číselnou osu na intervaly $I_1 = (-\infty, -3)$, $I_2 = (-3, 1)$ a $I_3 = (1, +\infty)$. Dosazením nuly vidíme, že výraz $-x^2 - 2x + 3$ je v intervalu I_2 kladný. Proto v sousedních intervalech bude zkoumaný výraz záporný. Nerovnici $-x^2 - 2x + 3 < 0$ tedy splňují právě všechna čísla z intervalů I_1 a I_3.

Řešením dané nerovnice je množina M, která je sjednocením intervalů I_1 a I_3, tj. $M = (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

b) Koeficienty členů kvadratického trojčlenu $x^2 - x + 1$ jsou $a = 1,\ b = -1,\ c = 1.$

b) Koeficienty členů kvadratického trojčlenu $x^2 - x + 1$ jsou $a = 1,\ b = -1,\ c = 1.$

Diskriminant $D =$

b) Koeficienty členů kvadratického trojčlenu $x^2 - x + 1$ jsou $a = 1,\ b = -1,\ c = 1.$

Diskriminant $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0.$

b) Koeficienty členů kvadratického trojčlenu $x^2 - x + 1$ jsou $a = 1,\ b = -1,\ c = 1.$

Diskriminant $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0.$

Protože $a = 1 > 0$, daná nerovnice $x^2 - x + 1 < 0$ není splněna žádným reálným číslem, tj. řešením je prázdná množina.

c) V nerovnici $-3x^2 + 2x - 1 < 0$ je $a = -3,\ b = 2,\ c = -1.$

c) V nerovnici $-3x^2 + 2x - 1 < 0$ je $a = -3,\ b = 2,\ c = -1.$

Diskriminant $D =$

c) V nerovnici $-3x^2 + 2x - 1 < 0$ je $a = -3,\ b = 2,\ c = -1.$

Diskriminant $D = 2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1) = -8 < 0$ a $a < 0.$

c) V nerovnici $-3x^2 + 2x - 1 < 0$ je $a = -3,\ b = 2,\ c = -1$.

Diskriminant $D = 2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1) = -8 < 0$ a $a < 0$.

Tedy řešením dané nerovnice je množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$.

d) V nerovnici $4x^2 - 4x + 1 < 0$ je $a = 4,\ b = -4,\ c = 1.$

d) V nerovnici $4x^2 - 4x + 1 < 0$ je $a = 4,\ b = -4,\ c = 1.$

Diskriminant $D =$

d) V nerovnici $4x^2 - 4x + 1 < 0$ je $a = 4,\ b = -4,\ c = 1.$

Diskriminant $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$ a $a = 4 > 0.$

d) V nerovnici $4x^2 - 4x + 1 < 0$ je $a = 4,\ b = -4,\ c = 1.$

Diskriminant $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$ a $a = 4 > 0.$

Nerovnici můžeme také zapsat ve tvaru $(2x - 1)^2 < 0.$

d) V nerovnici $4x^2 - 4x + 1 < 0$ je $a = 4,\ b = -4,\ c = 1$.

Diskriminant $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$ a $a = 4 > 0$.

Nerovnici můžeme také zapsat ve tvaru $(2x - 1)^2 < 0$. Odtud plyne, že není splněna žádným reálným číslem, tj. řešením je prázdná množina.

Studijní opory pro vyrovnávací kurz z matematiky na FAST VUT vznikly v rámci projektu

Modernizace výuky na Fakultě stavební VUT v Brně v rámci bakalářských a magisterských studijních programů

registrační číslo: CZ.04.1.03/3.2.15.2/0292,

který byl spolufinancován z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu ČR prostřednictvím Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy v rámci operačního programu *Rozvoj lidských zdrojů*, opatření 3.3.

Oficiální definice ESF zní: *ESF napomáhá rozvoji zaměstnanosti podporou zaměstnatelnosti, podnikatelského ducha, rovných příležitostí a investicemi do lidských zdrojů.*